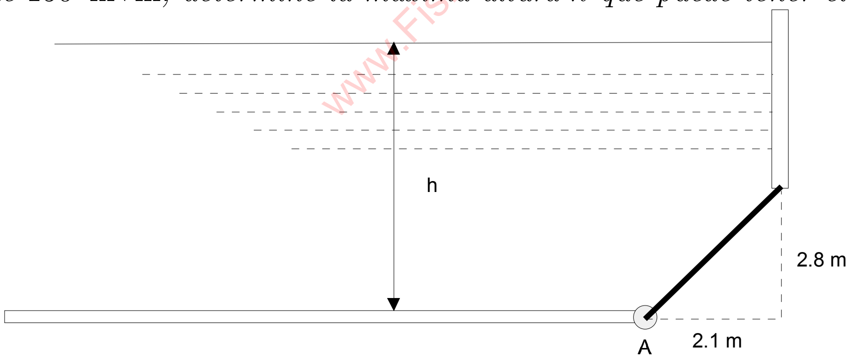
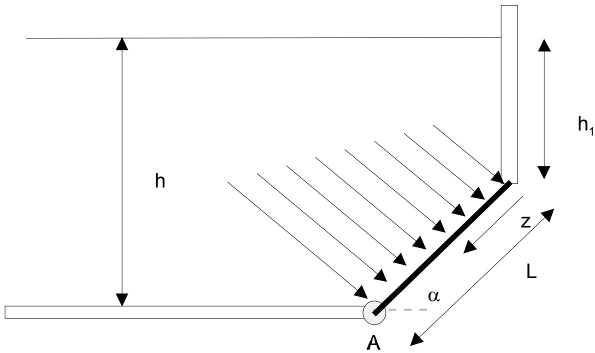
Soluciones ejercicios

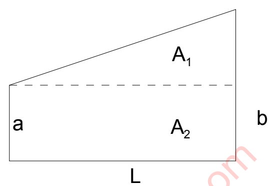
EJERCICIO 5.1 *La compuerta de la figura tiene* $2\,\mathrm{m}$ *de ancho y contiene agua. Si el eje que soporta la compuerta que pasa por* A *soporta un par máximo de* $150\ \mathrm{kN\,m}$*, determine la máxima altura* h *que puede tener el agua.*



Solución. El perfil de presión que actúa sobre la compuerta se ilustra en la figura que sigue



de manera que necesitamos el área y centroide de la figura



Como conocemos las propiedades de un rectángulo y de un triángulo es fácil obtener

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}L(b-a) + La = \frac{1}{2}L(a+b).$$

El centroide está en posición (medida desde la izquierda)

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\frac{L}{2}A_2 + \frac{2L}{3}A_1}{A_1 + A_2} \\ &= \frac{1}{3}L\frac{a+2b}{a+b} \end{aligned}$$

La presión varía de la forma

$$p = \rho g h_1 + \rho g z \sin\alpha,$$

entonces la fuerza por unidad de longitud es

$$\rho w g h_1 + \rho w g z \sin\alpha,$$

siendo w el ancho de la compuerta. De manera que la fuerza resultante es

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}L(\rho w g h_1 + \rho w g h_1 + \rho w g L \sin\alpha) \\ &= \frac{1}{2}\rho w g L(2h_1 + L\sin\alpha) \end{aligned}$$

y su punto de aplicación es

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{3}L\frac{(\rho wgh_1) + 2(\rho wgh_1 + \rho wgL\sin\alpha)}{\rho wgh_1 + (\rho wgh_1 + \rho wgL\sin\alpha)} \\ &= \frac{1}{3}L\frac{3h_1 + 2L\sin\alpha}{2h_1 + L\sin\alpha} \end{aligned}$$

El torque será de magnitud

$$\begin{aligned} \tau_A &= F(L - z_c) = \frac{1}{2}\rho wgL(2h_1 + L\sin\alpha)(L - \frac{1}{3}L\frac{3h_1 + 2L\sin\alpha}{2h_1 + L\sin\alpha}) \\ &= \frac{1}{6}L^3 gw\rho\sin\alpha + \frac{1}{2}L^2 gw\rho h_1 \end{aligned}$$

Nota: Vale la pena aprender a integrar pues es muy directo calcular

$$\begin{aligned} \tau_A &= \int_0^L (L - z)(\rho wgh_1 + \rho wgz\sin\alpha)dz \\ &= \frac{1}{6}L^3 gw\rho\sin\alpha + \frac{1}{2}L^2 gw\rho h_1 \end{aligned}$$

Numéricamente $w = 2\,\text{m}$, $\rho = 1\,\text{g}\,\text{cm}^{-3} = 1000\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$, $g = 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$, $L = \sqrt{2{,}1^2 + 2{,}8^2} = 3.5\,\text{m}$, $\cos\alpha = 2{,}1/3{,}5 = 0{,}6$, $\alpha = 53.13$, calculamos

$$\tau_A = 1.1433 \times 10^5 + 1.225 \times 10^5 h_1,$$

de manera que de

$1.1433 \times 10^5 + 1.225 \times 10^5 h_1 = 150000$, resulta $h_1 = 0{,}29118\,\text{m}$ y luego

$$h = h_1 + 2{,}8 = 3.091\,\text{m}.$$

Ejercicio 5.2 *Determínese el par que se requiere hacer en A para sostener la compuerta indicada cuyo ancho, perpendicular al papel es $w = 2\,\text{m}$.*

Solución. Si z indica la posición en la compuerta medida desde A hacia abajo, entonces numéricamente ($\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $w = 2\,\mathrm{m}$)

$$p = 10000(4+z)\ \mathrm{N\,m^{-2}}$$

y la fuerza por unidad de longitud será

$$20000(4+z)\,\mathrm{N\,m^{-1}}.$$

Su resultante y punto de aplicación será calculada igual que en el problema anterior con

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}(2)(20000\times 4 + 20000\times 6) \\ &= 200000\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

y su punto de aplicación es

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{3}2\frac{(20000\times 4) + 2(20000\times 6)}{20000\times 4 + (20000\times 6)} \\ &= 1.067\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

de modo que el torque es

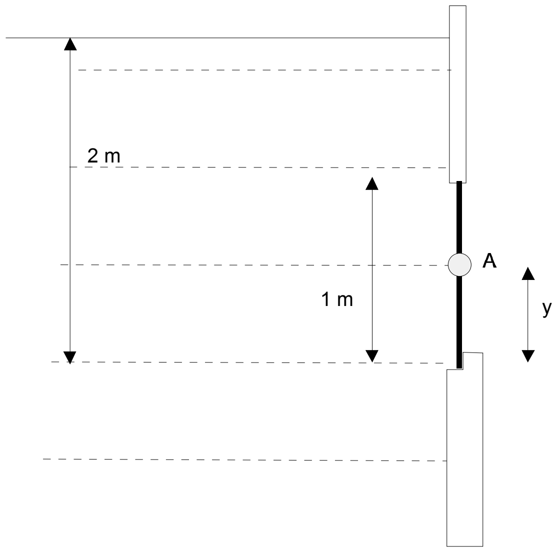
$$\tau_A = 200000\times 1.067 = 2.134\times 10^5\,\mathrm{N\,m}$$

Note de nuevo que integrando es mucho más directo

$$\int_0^2 20000(4+z)zdz = 2.13\times 10^5$$

▲

Ejercicio 5.3 *Determine la ubicación "y "del pivote fijo A de manera que justo se abra cuando el agua está como se indica en la figura.*



Solución. Si h indica una coordenada de posición medida desde la superficie del agua hacia abajo, entonces la presión en un punto ubicado a esa profundidad es

$$p = \rho g h,$$

(la presión atmosférica actúa por ambos lados y se cancela). Para que la compuerta justo se abra, el punto de aplicación de la resultante debe estar en el punto A. La coordenada del punto de aplicación medida desde el punto más alto de la compuerta puede escribirse

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{3}L\frac{(\rho w g h_1) + 2(\rho w g h_2)}{\rho w g h_1 + (\rho w g h_2)} \\ &= \frac{1}{3}L\frac{h_1 + 2h_2}{h_1 + h_2}, \end{aligned}$$

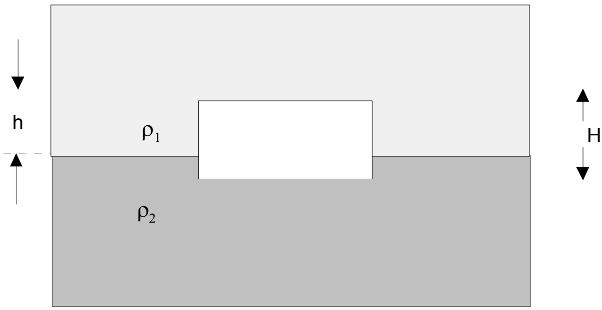
entonces

$$\frac{1}{3}\frac{1 + 2(2)}{1 + 2} = 0{,}56\,\mathrm{m}$$

por lo tanto

$$y = 1 - 0{,}56 = 0{,}44\,\mathrm{m}$$

Ejercicio 5.4 *Un bloque con una sección transversal de área A, altura H y densidad ρ , está en equilibrio entre dos fluidos de densidades ρ_1 y ρ_2 , con $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Suponga que los fluidos no se mezclan. Determine la fuerza de empuje sobre el bloque y encuentre la densidad del bloque en función de ρ_1 , ρ_2 , H y h.*



Solución. El empuje es igual al peso de la región de fluido ocupada por el cuerpo, es decir

$$\begin{aligned} E &= \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2 \\ &= \rho_1 g A h + \rho_2 g A(H-h). \end{aligned}$$

Para obtener la densidad tenemos que

$$\rho g A H = \rho_1 g A h + \rho_2 g A(H-h),$$

o sea

$$\rho = \frac{\rho_1 h + \rho_2 (H-h)}{H}.$$

Ejercicio 5.5 *Un cuerpo de material desconocido pesa* 4 N *en el aire y* 2,52 N *sumergido en agua. Encuentre la densidad específica del material.*

Solución. En aire el peso es

$$P = \rho_C g V_C,$$

completamente sumergido

$$P' = \rho_C g V_C - \rho_L g V_C,$$

de manera que

$$\frac{P}{P'} = \frac{\rho_C g V_C}{\rho_C g V_C - \rho_L g V_C} = \frac{\rho_C}{\rho_C - \rho_L},$$

entonces

$$\rho_C = 2.702\,7 \rho_L$$

o sea

$$\rho_C = 2.702\,7\,\mathrm{g\,cm^{-3}}.$$

▲

EJERCICIO 5.6 *Una balsa de área A, espesor h y masa* 400 kg *flota en aguas tranquilas con una inmersión de* 5 cm*. Cuando se le coloca una carga sobre ella, la inmersión es de* 7,2 cm*. Encuentre la masa de la carga.*

Solución. Si la masa del cuerpo es M y la de la carga es m podemos escribir

$$\begin{aligned} Mg &= (\rho_L g A)5, \\ (M+m)g &= (\rho_L g A)7{,}2, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\frac{M+m}{M} = \frac{7{,}2}{5},$$

y

$$m = 0{,}44M = 176{,}0\,\mathrm{kg}.$$

▲

EJERCICIO 5.7 *Un cuerpo homogéneo prismático de* 20 cm *de espesor* 20 cm *de ancho y* 40 cm *de longitud se mantiene en reposo sumergido en agua a* 50 cm *de profundidad al aplicar sobre él una tensión de* 50 N *. ¿Cuánto pesa en aire y cuál es su densidad relativa?*

Solución. La tensión es el peso sumergido, es decir

$$P' = \rho_C g V_C - \rho_L g V_C = 50,$$

pero $gV_C = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}4 \times 10 = 0{,}16$ de manera que

$$\rho_C - \rho_L = \frac{50}{0{,}16} = 312.\,5$$

de manera que

$$\rho_C = 1312.\,5\,\mathrm{kg\,m^{-3}},$$

la densidad relativa es

$$\rho_{Cr} = 1{,}3125,$$

y el peso en aire será

$$\begin{aligned} P &= \rho_C g V_C \\ &= 0{,}16 \times 1312.\,5 = 210{,}0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.8 *¿Qué fracción del volumen de una pieza sólida de metal de densidad relativa al agua 7,25 flotará sobre un mercurio de densidad relativa 13,57?*

Solución. Sea m la masa de la pieza (C). Su peso será

$$W = mg.$$

Su volumen total será

$$V = \frac{m}{\rho_C},$$

de modo que podemos escribir el peso en términos del volumen como

$$W = \rho_C V g$$

Cuando una fracción V_S del volumen queda sumergido, la fuerza de empuje es

$$E = \rho_{H_g} g V_S.$$

En la situación de equilibrio el peso iguala al empuje de modo que

$$\rho_C V g = \rho_{H_g} g V_S,$$

de donde

$$\frac{V_S}{V} = \frac{\rho_C}{\rho_{Hg}} = \frac{7{,}25}{13{,}57} = 0{,}534$$

o sea hay un 53,4 % sumergido y por lo tanto 46. 6 % sobre el nivel del Mercurio.

Ejercicio 5.9 *Un tarro cilíndrico de* 20 cm *de diámetro flota en agua con* 10 cm *de su altura por encima del nivel del agua cuando se suspende un bloque de hierro de* 100 N *de peso de su fondo. Si el bloque se coloca ahora dentro del cilindro ¿qué parte de la altura del cilindro se encontrará por encima de la superficie del agua? Considere la densidad del hierro* 7,8 g cm^{-3}.

Solución. Sea H en metros, la altura del cilindro, R el radio y h la altura por encima del nivel del agua. El volumen sumergido de cilindro será

$$V = \pi R^2(H - h).$$

Sean V', W', ρ' el volumen, peso y densidad del hierro

$$V' = \frac{M'}{\rho'} = \frac{W'}{g\rho'},$$

entonces la condición de equilibrio será

$$M_C g + W' = \rho_{H_2O} g\pi R^2(H - h) + \rho_{H_2O} g\frac{W'}{g\rho'}.$$

Cuando el bloque se coloca adentro, no está presente el empuje sobre el bloque de hierro de modo que

$$M_C g + W' = \rho_{H_2O} g\pi R^2(H - h'),$$

donde h' es la nueva altura sobre el nivel del agua. Al igualar las dos ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} \pi R^2(H - h) + \frac{W'}{g\rho'} &= \pi R^2(H - h'), \\ -h + \frac{W'}{\pi R^2 g\rho'} &= -h' \end{aligned}$$

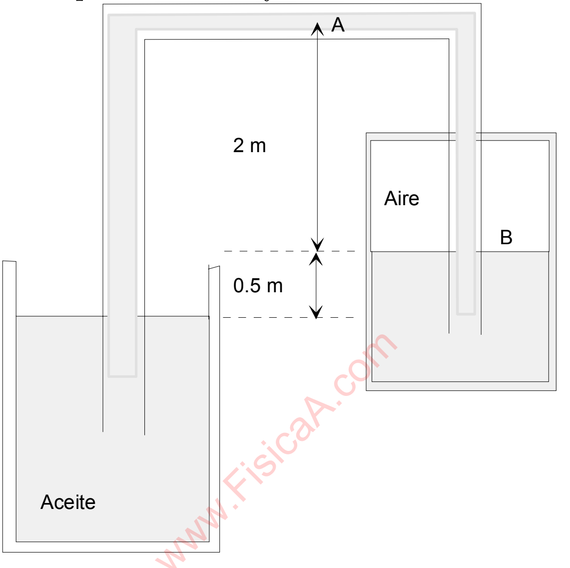
$$h' = h - \frac{1}{\pi R^2}\frac{W'}{g\rho'}.$$

Los datos son $h = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $R = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $\rho' = 7800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ y $W' = 100\,\mathrm{N}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ obteniendo

$$0{,}1 - \frac{1}{\pi(0{,}1)^2}\frac{100}{10 \times 7800}$$

$$h' = 0{,}059\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{cm}$$

EJERCICIO 5.10 *Considere el sistema de la figura donde el tubo está lleno de aceite de densidad* $\rho = 0{,}85\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. *Uno de los recipientes está abierto a la atmósfera y el otro está cerrado y contiene aire. Determine la presión en los puntos* A *y* B *si la presión atmosférica es* $1\,\mathrm{atm}$.



Solución. Al nivel del aceite de la izquierda tenemos actuando la presión atmosférica $p_a = 1\,\mathrm{atm} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$ y se tiene

$1\,\mathrm{g\,cm^{-3}} = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

$$\begin{aligned} p_a &= p_A + \rho g h_1, \\ p_B &= p_A + \rho g h_2, \end{aligned}$$

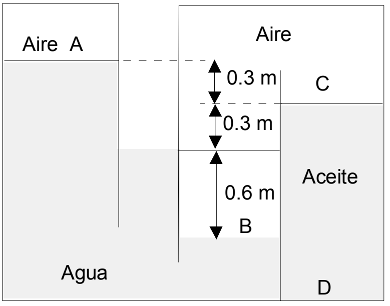
con $h_1 = 2{,}5\,\mathrm{m}$ y $h_2 = 2\,\mathrm{m}$. Así calculamos

$$\begin{aligned} p_A &= 101\,325 - 850 \times 9{,}8 \times 2{,}5 \\ &= 80500{,}0\,\mathrm{Pa} \\ &= 0{,}794\,47\,\mathrm{atm}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p_B &= 80500{,}0 + 850 \times 9{,}8 \times 2 \\ &= 97160{,}0\,\mathrm{Pa} \\ &= 0{,}958\,89\,\mathrm{atm}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 5.11 *Con respecto a la figura, determine la presión en los puntos A, B, y C de la figura donde el aceite tiene densidad* $0{,}90\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ *y el agua* $1{,}00\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$.



Solución. Supondremos que la presión atmosférica que actúa sobre la segunda columna de agua es $p_a = 1\,\mathrm{atm} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$. Entonces

$$\begin{aligned} p_a &= p_A + \rho_{agua} \times g \times 0{,}6, \\ p_B &= p_a + \rho_{agua} \times g \times 0{,}6, \\ p_B &= p_C + \rho_{aire} \times g \times 0{,}9. \end{aligned}$$

Si se desprecia la densidad del aire tenemos que

$$\begin{aligned} p_A &= 101325 - 1000 \times 9{,}8 \times 0{,}6 \\ &= 95445\,\mathrm{Pa} \\ p_B &= p_C = 101325 + 1000 \times 9{,}8 \times 0{,}6 \\ &= 1\,072\,10\,\mathrm{Pa}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 5.12 *En una piscina se encuentra flotando una balsa que tiene forma de un paralelepípedo de densidad relativa (al agua) de* $0{,}3$ *y cuyas dimensiones son* $120\,\mathrm{cm}$ *de largo,* $100\,\mathrm{cm}$ *de ancho y* $25\,\mathrm{cm}$ *de alto. Determine*

a) La fuerza de empuje.

b) La altura medida desde el fondo de la balsa a la que se encuentra la línea de flotación.

c) *El peso que debería colocarse sobre la balsa para que esta se hundiera* 6 cm *más.*

Solución. Si la balsa flota, entonces la fuerza de empuje debe ser igual al peso, esto es

$$E = \rho g V = 300 \times 9{,}8 \times 1{,}2 \times 1 \times 0{,}25 = 882{,}0\,\mathrm{N}.$$

Sea h la altura sumergida. El empuje debe además ser igual al peso del líquido desplazado, es decir

$$E = \rho_{agua} g V_{desp},$$

entonces podemos igualar

$$300 \times 9{,}8 \times 1{,}2 \times 1 \times 0{,}25 = 1000 \times 9{,}8 \times 1{,}2 \times 1 \times h$$

de donde

$$h = \frac{300 \times 0{,}25}{1000} = 0{,}075\,\mathrm{m} = 7{,}5\,\mathrm{cm}.$$

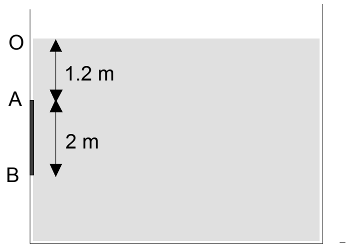
Para que se hunda 6 cm más tenemos que agregar un peso W, donde el peso total debe igualar al nuevo empuje, esto es

$$882 + W = 1000 \times 9{,}8 \times 1{,}2 \times 1 \times (0{,}075 + 0{,}06) = 15\,87{,}6$$

de donde

$$W = 15\,87{,}6 - 882 = 7\,05{,}6\,\mathrm{N}.$$

Ejercicio 5.13 *Determine la fuerza resultante y su punto de aplicación debida a la acción del agua sobre la superficie plana rectangular de altura* $AB = 2\,\mathrm{m}$ *y de ancho* 1 m *(hacia adentro del papel), donde el punto* A *está a profundidad de* 1,2 m.



Solución. Como se explica en el texto

$$F = \frac{1}{2}\rho w g\left(y_2^2 - y_1^2\right)$$

y su punto de aplicación será

$$y_P = \frac{2}{3}\frac{y_1^2 + y_2 y_1 + y_2^2}{y_1 + y_2}.$$

siendo $y_1 = 1{,}2\,\mathrm{m}$, $y_2 = 3{,}2\,\mathrm{m}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $w = 1\,\mathrm{m}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ así calcule

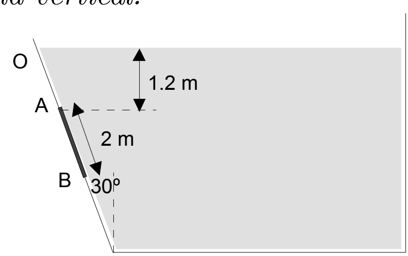
$$F = \frac{1}{2}1000 \times 9{,}8(3{,}2^2 - 1{,}2^2) = 43120{,}0\,\mathrm{N},$$

y

$$y_P = \frac{2}{3}\frac{1{,}2^2 + 1{,}2 \times 3{,}2 + 3{,}2^2}{1{,}2 + 3{,}2} = 2.351\,5\,\mathrm{m},$$

medido desde la superficie del agua.

EJERCICIO 5.14 *Repita el problema anterior si la línea OAB forma un ángulo de* 30^o *respecto a la vertical.*



Solución. Como se explica en el texto

$$F = \frac{1}{2}\rho w g\left(y_2^2 - y_1^2\right)\cos\theta,$$

y su punto de aplicación será

$$y_P = \frac{2}{3}\frac{y_1^2 + y_2 y_1 + y_2^2}{y_1 + y_2},$$

donde los y se miden desde la superficie pero a lo largo de la compuerta. Entonces tenemos

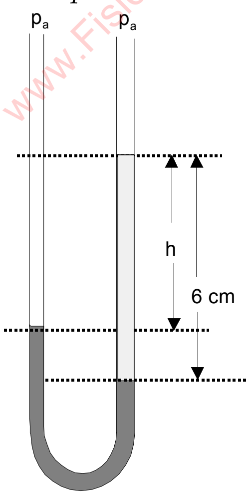
$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1{,}2}{\cos 30} = 1.\,385\,6\,\mathrm{m}, \\ y_2 &= y_1 + 2 = 3.\,385\,6\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

calculando obtenemos

$$F = \frac{1}{2}1000 \times 9{,}8(3.\,385\,6^2 - 1.\,385\,6^2)\cos\frac{\pi}{6} = 40493\,\mathrm{N},$$

$$y_P = \frac{2}{3}\frac{1.\,385\,6^2 + 1.\,385\,6 \times 3.\,385\,6 + 3.\,385\,6^2}{1.\,385\,6 + 3.\,385\,6} = 2.\,525\,3\,\mathrm{m}.$$

EJERCICIO 5.15 *Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con agua. Después se vierte keroseno de densidad* $0{,}82\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ *en uno de los lados que forma una columna de* $6\,\mathrm{cm}$ *de altura. Determine la diferencia de altura* h *entre las superficies de los dos líquidos.*



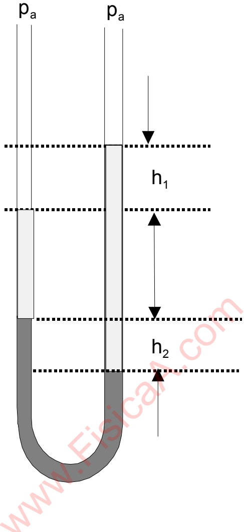
Solución. Al nivel de la columna de agua en el lado derecho, la presión es la misma en las dos ramas, por lo tanto

$$\rho_a(6 - h) = \rho_k 6,$$

de donde

$$h = 1.\,08\,\mathrm{cm}.$$

EJERCICIO 5.16 *Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con mercurio. Después se vierte agua en ambos lados obteniendo una situación de equilibrio ilustrada en la figura, donde* $h_2 = 1\,\mathrm{cm}$*. Determine la diferencia de altura* h_1 *entre las superficies de los dos niveles de agua.*



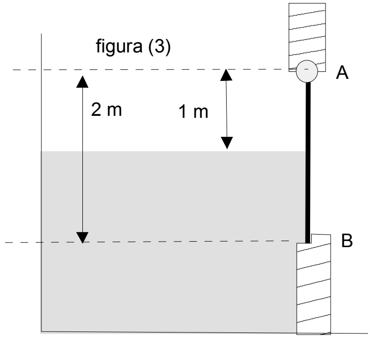
Solución. Sea ρ_a la densidad del agua y ρ_m la densidad del mercurio. La presión al nivel inferior del mercurio puede es la misma y puede calcularse por las dos ramas obteniendo

$$\rho_m g h_2 = \rho_a g h_2 + \rho_a g h_1,$$

de donde

$$h_1 = (\frac{\rho_m}{\rho_a} - 1)h_2.$$

EJERCICIO 5.17 *La compuerta de la figura tiene una altura de* $2\,\mathrm{m}$ *un ancho de* $2\,\mathrm{m}$*, está articulada en* A *y apoyada en* B *como se indica en la figura. Si el fluido es agua de densidad* $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ *y su nivel llega hasta la mitad de la compuerta, determine las reacciones horizontales en los puntos* A *y* B*.*



Solución. El centro de presión está a distancia

$$y_P = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}\,\mathrm{m}$$

del punto A y la fuerza de presión es

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\rho g w h^2 = \\ &= \frac{1}{2}1000 \times 9{,}8 \times 2 \times 1^2 \\ &= 9800{,}0\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

Si llamamos H_A y H_B las reacciones horizontales en A y en B, tenemos que

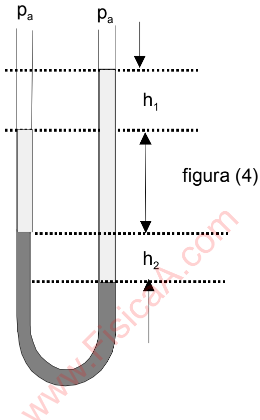
$$\begin{aligned} H_A + H_B + F &= 0, \\ H_B \times 2 + F \times \frac{5}{3} &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} H_B &= -F \times \frac{5}{6} = -8166.\,7\,\mathrm{N}, \\ H_A &= 8166.\,7 - 9800{,}0 = -1633.\,3\,\mathrm{N}, \end{aligned}$$

ambas hacia la izquierda.

Ejercicio 5.18 *El tubo en U de la figura está abierto a la presión atmosférica en ambos extremos y contiene dos líquidos (1) y (2) que no se mezclan* *como se indica en la figura. Determine la razón de las densidades* $\frac{\rho_1}{\rho_2}$.



Solución. Igual que en un problema anterior, igualamos la presión calculada por las dos ramas (2 el líquido inferior)

$$\rho_2 g h_2 = \rho_1 g(h_1 + h_2),$$

de donde

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1 + h_2}.$$