Soluciones ejercicios

NOTA 6.1 (1), (2), y (3) representan el grado de dificultad del problema. El (1) corresponde a problemas tipo prueba, el (2) corresponde a problemas discriminatorios y el (3) a problemas de tareas.

EJERCICIO 6.1 *La posición de una partícula que se mueve sobre el eje OX de un sistema de coordenadas está dada*

$$x(t) = 1 + 8t - 2t^2,$$

donde la posición está en metros y el tiempo en segundos. Determine

a) *La velocidad en* $t = 5\,\mathrm{s}$.

b) *La aceleración en* $t = 2\,\mathrm{s}$.

c) *El instante en que la partícula cambia su sentido de movimiento.*

d) *El desplazamiento de la partícula entre* $t = 0$ *y* $t = 4\,\mathrm{s}$.

e) *El espacio recorrido entre* $t = 0$ *y* $t = 4\,\mathrm{s}$.

f) *El espacio recorrido entre* $t = 0$ *y* $t = 5\,\mathrm{s}$.

Solución. Calculamos directamente

a) $v(t) = \frac{dx}{dt} = 8 - 4t$ que evaluada en $t = 5$ da $v(5) = -12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

b) $a(t) = \frac{dv}{dt} = -4$ constante por lo tanto $a(2) = -4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

c) Cuando $v(t) = 8 - 4t = 0$ esto es cuando $t = 2\,\mathrm{s}$

d) $\Delta x = x(4) - x(0) = (1 + 8 \times 4 - 2 \times 4^2) - 1 = 0\,\mathrm{m}$

e) Notemos que partícula cambia sentido del movimiento cuando $v(t) = 8 - 4t = 0$ es decir en $t = 2\,\mathrm{s}$, por lo tanto

$$s = x(2) - x(0) + x(2) - x(4) = 16\,\mathrm{m}$$

f) Similarmente

$$s = x(2) - x(0) + x(2) - x(5) = 26\,\mathrm{m}$$

Ejercicio 6.2 *Una partícula se mueve a lo largo del eje OX de un sistema de coordenadas con aceleración constante. En el instante inicial pasa por la posición $x(0) = -10\,\mathrm{m}$ con una velocidad $v(0) = -20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y en $t = 3\,\mathrm{s}$ su posición es $x(3) = -52\,\mathrm{m}$. Determine*

a) La posición de la partícula en función del tiempo $x(t)$. (o ecuación itinerario)

b) El espacio recorrido por la partícula entre $t = 3\,\mathrm{s}$ y $t = 6\,\mathrm{s}$.

c) La velocidad media entre $t = 4\,\mathrm{s}$ y $t = 7\,\mathrm{s}$.

d) Los intervalos de tiempo en que la partícula se aleja del origen.

Solución. Si a indica la aceleración entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= -10 - 20t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

pero se sabe que $x(3) = -52$ por lo tanto

$$-52 = -10 - 20 \times 3 + \frac{1}{2}a \times 3^2$$

de donde $a = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Ahora podemos calcular las respuestas a)

$$x(t) = -10 - 20t + 2t^2$$

b) Para saber el espacio recorrido debemos saber cuando cambia el sentido del movimiento

$$v(t) = -20 + 4t = 0 \rightarrow t = 5\,\mathrm{s}$$

que está dentro del intervalo $(3,6)$. Como inicialmente va hacia la izquierda

$$s = x(3) - x(5) + x(6) - x(5) = 10\,\mathrm{m}$$

c) Tenemos que calcular

$$v_m(4,7) = \frac{x(7) - x(4)}{7-4},$$

pero podemos evaluar $x(7) = -52\,\mathrm{m}$ y $x(4) = -58\,\mathrm{m}$ luego

$$v_m(4,7) = \frac{-52+58}{7-4} = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

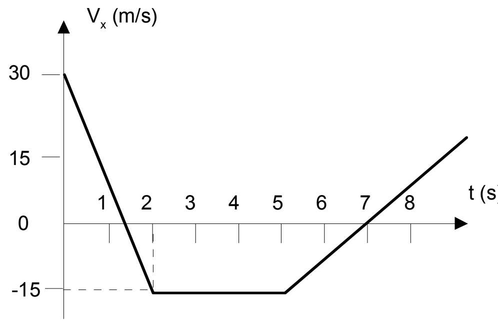
d) La partícula comienza a moverse hacia la izquierda hasta alcanzar su mínimo que ocurre en $t = 5\,\mathrm{s}$. Posteriormente cruza el origen nuevamente cuando

$$-10 - 20t + 2t^2 = 0 \rightarrow t = 10.477\,\mathrm{s}$$

Por lo tanto la partícula se aleja del origen en los intervalos de tiempo $0 < t < 5$ y $t > 10{,}477\,\mathrm{s}$

▲

Ejercicio 6.3 *El gráfico siguiente ilustra la variación de la velocidad $v(t)$ de una partícula que se mueve sobre el eje OX de un sistema de coordenadas con el tiempo. Si en $t = 0$ la partícula está en el origen del sistema, determine*



a) *La aceleración de la partícula en* $t = 1\,\mathrm{s}$.

b) *El desplazamiento de la partícula entre* $t = 0\,\mathrm{s}$ *y* $t = 3\,\mathrm{s}$.

c) *La velocidad media de la partícula entre* $t = 4\,\mathrm{s}$ *y* $t = 9\,\mathrm{s}$.

d) *La posición de la partícula en función del tiempo* $x(t)$ *(ecuación itinerario) en el intervalo de* $t = 0\,\mathrm{s}$ *a* $t = 2\,\mathrm{s}$.

e) *Los intervalos de tiempo en que la partícula se dirige hacia el origen.*

Solución. Es conveniente primero evaluar las aceleraciones (pendientes del gráfico dado) en los tres tramos. Así resulta

$$a_1 = -\frac{45}{2}\,\mathrm{m\,s^{-2}},\ a_2 = 0\,\mathrm{m\,s^{-2}},\ a_3 = \frac{15}{2}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

luego al utilizar la ecuación

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2,$$

resulta $x(t)$ para todo el recorrido

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}a_1t^2 = 30t - \frac{45}{4}t^2 \text{ para } t \leqslant 2 \\
x(2) &= 15\,\mathrm{m} \\
x(t) &= x(2) + v(2)(t-2) + \frac{1}{2}a_2(t-2)^2 = 15 - 15(t-2) \text{ para } 2 \leqslant t \leqslant 5 \\
x(5) &= -30\,\mathrm{m} \\
x(t) &= x(5) + v(5)(t-5) + \frac{1}{2}a_3(t-5)^2 \\
&= -30 - 15(t-5) + \frac{15}{4}(t-5)^2 \text{ para } 5 \leqslant t
\end{aligned}$$

luego las respuestas serán:

a) $a(1) = -\frac{45}{2}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

b) $\Delta x = x(3) - x(0) = 15 - 15(3-2) = 0$

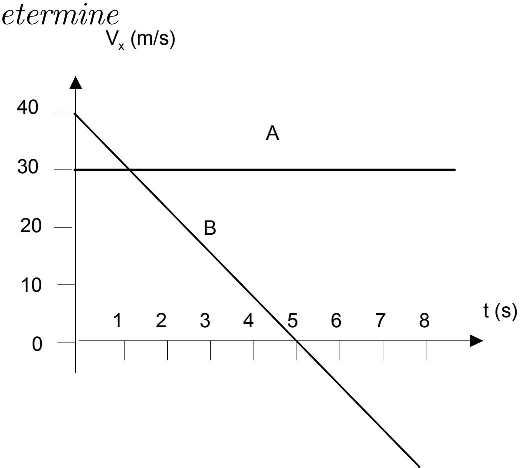
c)

$$v_m = \frac{x(9)-x(4)}{9-4} = \frac{-30-15(9-5)+\frac{15}{4}(9-5)^2-(15-15(4-2))}{9-4} = -3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

d) $x(t) = 30t - \frac{45}{4}t^2$

e) la partícula parte alejándose del origen hacia la derecha hasta que $v(t) = 30 - \frac{45}{2}t = 0$ o sea $t = \frac{4}{3}$ s. Luego se mueve hacia la izquierda acercándose al origen hasta que $x(t) = 15 - 15(t-2) = 0$ o sea hasta $t = 3$ s. Luego se alejará del origen nuevamente hasta que $v = 0$ y esto ocurre si $t = 7$ s. De ahí se acercará hasta cuando lo cruce de nuevo esto es cuando $-30 - 15(t-5) + \frac{15}{4}(t-5)^2 = 0$, con solución $t = 7 + 2\sqrt{3} = 10.4641$ s. En consecuencia se acerca al origen si $\frac{4}{3}\,\mathrm{s} < t < 3\,\mathrm{s}$ y $7\,\mathrm{s} < t < 10.4641\,\mathrm{s}$ s

Ejercicio 6.4 *En el gráfico de la figura están representadas las velocidades de dos partículas A y B que se mueven a lo largo del eje OX de un sistema de coordenadas. Determine*



a) *La aceleración de B.*

b) *Espacio recorrido por A desde $t = 0$ hasta cuando B alcanza la velocidad $v_B = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.*

c) *El desplazamiento de B en el intervalo de $t = 0\,\mathrm{s}$ a $t = 10\,\mathrm{s}$.*

d) *La posición de la partícula A en función del tiempo t, si su posición inicial es $x(0) = 8\,\mathrm{m}$.*

Solución. La aceleración de B es la pendiente de la curva v_x vs t. Dado que la curva es una recta ella resulta constante

$$a_{x_B} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{40}{8} = -8\,\mathrm{m\,s^{-2}}. \text{ (a)}$$

La ecuación de la recta es

$$v_{x_B}(t) = 40 - 8t.$$

De aquí se determina el instante en que el móvil B ´alcanza la velocidad $v_B = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}} \rightarrow 40 - 8t = 30$ y de aquí $t = \frac{10}{8}\,\mathrm{s} = 1.25\,\mathrm{s}$. El espacio recorrido por A en ese tiempo será

$$x_A = 30t == 37.5\,\mathrm{m}. \quad \text{(b)}$$

El desplazamiento de B es el área bajo la curva (la integral de v_x)

$$\Delta x_B = \int_0^{10} v_{x_B}(t)dt = \int_0^{10} (40 - 8t)dt = 0. \text{ (c)}$$

Si usted aún no sabe integrar, el área bajo la curva puede calcularla como la suma de las áreas de dos triángulos, una positiva y la otra negativa

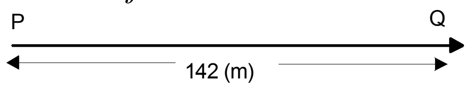
$$\Delta x_B = \frac{1}{2}40 \times 5 - \frac{1}{2}40 \times 5 = 0\,\mathrm{m}.$$

La posición de la partícula A es simplemente

$$\begin{aligned} x_A(t) &= x_A(0) + v_{x_A}t \\ &= 8 + 30t. \quad \text{(d)} \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 6.5 *Dos partículas A y B se mueven con velocidad constante sobre un mismo eje OX en sentido contrario de manera que en $t = 0$ cuando B pasa por Q su velocidad es $v_B(0) = -5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, A pasa por P con velocidad $v_A(0) = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La distancia entre los puntos A y B es $142\,\mathrm{m}$. Determine las desaceleraciones constantes que deben aplicar ambas partículas para que se detengan simultáneamente justo antes de chocar.*



Solución. De acuerdo a los datos (colocando el origen en P)

$$\begin{aligned}
x_A(t) &= 142 - 5t + \frac{1}{2}a_A t^2,\\
v_A(t) &= -5 + a_A t,\\
x_B(t) &= 6t - \frac{1}{2}a_B t^2,\\
v_B(t) &= 6 - a_B t
\end{aligned}$$

Note que los signos de las aceleraciones corresponden ambas a desaceleraciones de magnitud a. Ellas se detienen simultáneamente si

$$\begin{aligned}
-5 + a_A t &= 0,\\
6 - a_B t &= 0,
\end{aligned}$$

y ellas deben justo estar en la misma posición

$$\begin{aligned}
x_A &= x_B,\\
142 - 5t + \frac{1}{2}a_A t^2 &= 6t - \frac{1}{2}a_B t^2
\end{aligned}$$

podemos reemplazar $a_A t = 5$ y $a_B t = 6$ obteniendo

$$142 - 5t + \frac{1}{2}5t = 6t - \frac{1}{2}6t$$

de donde

$$t = \frac{284}{11} = 25.818\,\mathrm{s},$$

y luego

$$\begin{aligned}
a_A &= \frac{5}{25.818} = 0{,}193\ \mathrm{m\,s^{-2}},\\
a_B &= \frac{6}{25.818} = 0{,}232\ \mathrm{m\,s^{-2}}
\end{aligned}$$

EJERCICIO 6.6 *Una partícula se mueve en la dirección positiva del eje OX con una rapidez constante de $50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ durante $10\,\mathrm{s}$. A partir de este último instante acelera constantemente durante $5\,\mathrm{s}$ hasta que su rapidez es $80\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Determine:*

a) La aceleración de la partícula en los primeros $10\,\mathrm{s}$.

b) La aceleración de la partícula entre $t = 10\,\mathrm{s}$ y $t = 15\,\mathrm{s}$.

c) El desplazamiento de la partícula entre $t = 0\,\mathrm{s}$ y $t = 15\,\mathrm{s}$.

d) La velocidad media de la partícula entre $t = 10\,\mathrm{s}$ y $t = 15\,\mathrm{s}$.

Solución. Para el primer tramo

a) $a = 0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

b) Aquí a es constante

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{80 - 50}{5} = 6\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

c) El desplazamiento es el área bajo la curva (hágala) $v(t)$. El resulta

$$\Delta x = 50 \times 15 + \frac{1}{2} 5 \times 30 = 825\,\mathrm{m}.$$

d) Esta es (área entre $t = 10$ hasta $t = 15$)

$$v_m = \frac{x(15) - x(10)}{5} = \frac{50 \times 5 + \frac{1}{2} 30 \times 5}{5} = 65\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

EJERCICIO 6.7 *Un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, recorre en los dos primeros segundo un espacio de $16{,}72\,\mathrm{m}$ y durante los dos segundos siguientes un espacio de $23{,}46\,\mathrm{m}$. Determine* *a)* *El espacio que recorre en los siguientes cuatro segundos.*

b) *La velocidad inicial.*

c) *La aceleración del cuerpo.*

EJERCICIO 6.8 *Dos partículas A y B salen al mismo tiempo desde el origen de un sistema de coordenadas moviéndose en el sentido positivo del eje OX. La partícula A tiene una velocidad inicial de $v_A(0) = 18\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y una aceleración constante $a_A = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, mientras que la partícula B tiene una velocidad inicial de $v_B(0) = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y una aceleración constante $a_B = 8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Determine el instante en que las partículas se encuentran nuevamente.*

Solución. Podemos escribir

$$\begin{aligned} x_A(t) &= 18t + \frac{1}{2}4t^2, \\ x_B(t) &= 10t + \frac{1}{2}8t^2. \end{aligned}$$

Las partículas se encuentran cuando $x_A = x_B$ y de aquí

$$18t + \frac{1}{2}4t^2 = 10t + \frac{1}{2}8t^2$$

con soluciones $t = 0$, y $t = 4\,\mathrm{s}$, la segunda sirve.

EJERCICIO 6.9 *En una carrera de $100\,\mathrm{m}$ dos jóvenes A y B cruzan la meta empatados, marcando ambos $10{,}2\,\mathrm{s}$. Si, acelerando uniformemente, A alcanza su rapidez máxima a los $2\,\mathrm{s}$ y B a los $3\,\mathrm{s}$ y ambos mantienen la rapidez máxima durante la carrera, determine:*

a) *Las aceleraciones de A y B.*

b) *Las rapideces máximas de A y B.*

c) *El que va adelante a los $10\,\mathrm{s}$ y la distancia que los separa en ese instante.*

Solución. En general si t' es el tiempo que dura la aceleración y V es la velocidad constante final, tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}at^2, \text{ si } t < t' \text{ y} \\ V &= at', \end{aligned}$$

luego si X indica la distancia total a recorrer, el tiempo T que se emplea es

$$\begin{aligned} T &= t' + \frac{X - \frac{1}{2}at'^2}{V} \\ T &= t' + \frac{X - \frac{1}{2}at'^2}{at'} \end{aligned}$$

para nuestro caso, como llegan empatados tenemos

$$\begin{aligned} T &= (2) + \frac{100 - \frac{1}{2}a_A(2)^2}{a_A(2)} = 10{,}2, \\ T &= (3) + \frac{100 - \frac{1}{2}a_B(3)^2}{a_B(3)} = 10{,}2 \end{aligned}$$

que dan

$$\begin{aligned} a_A &= 5.\,434\,8\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \\ a_B &= 3.\,831\,4\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \end{aligned}$$

así resulta además

$$\begin{aligned} V_A &= a_A t'_A = 5.\,434\,8 \times 2 = 10.\,870\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \\ V_B &= a_B t'_B = 3.\,831\,4 \times 3 = 11.\,494\,\mathrm{m\,s^{1}}, \end{aligned}$$

Para la etapa de velocidad constante tenemos que

$$\begin{aligned} x_A(t) &= \frac{1}{2}a_A(t'_A)^2 + V_A(t - t'_A), \\ x_B(t) &= \frac{1}{2}a_B(t'_B)^2 + V_B(t - t'_B), \end{aligned}$$

y reemplazando valores numéricos son

$$\begin{aligned} x_A(t) &= \frac{1}{2}5.\,434\,8(2)^2 + 10.\,870(t-2) = -10.\,87 + 10.\,87t, \\ x_B(t) &= \frac{1}{2}3.\,831\,4(3)^2 + 11.\,494(t-3) = -17.\,241 + 11.\,494t, \end{aligned}$$

y para $t = 10\,\mathrm{s}$ resultan

$$\begin{aligned} x_A &= -10.87 + 10.87t = 97.83\,\mathrm{m}, \\ x_B &= -17.241 + 11.494t = 97.699\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

luego va adelante A y la distancia que los separa es

$$\Delta x = 97.83 - 97.699 = 0{,}131 \text{ m}.$$

▲

EJERCICIO 6.10 *Una partícula que se mueve en movimiento unidimensional sobre el eje OX parte del origen con una velocidad inicial* $v(0) = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *y desacelera constantemente con una aceleración* $a = -10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. *Determine la posición máxima que alcanza sobre el eje de movimiento y la velocidad cuando pasa nuevamente por el origen.*

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= 5t - 5t^2, \\ v(t) &= 5 - 10t, \end{aligned}$$

ella cambia su sentido de movimiento (está en un máximo) cuando $5 - 10t = 0$ y de aquí $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$. Para ese instante calculamos

$$x_{máximo} = 5(0{,}5) - 5(0{,}5)^2 = 1.25\,\mathrm{m}.$$

Cuando pasa nuevamente por el origen $x = 0$ y de aquí $5t - 5t^2 = 0$, con solución $t = 1\,\mathrm{s}$. Para ese instante $v(1) = 5 - 10 = -5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

▲

EJERCICIO 6.11 *Si una partícula en que se mueve en movimiento unidimensional sobre el eje OX parte del origen con velocidad nula y aceleración constante a, demuestre que las distancias recorridas en cada segundo aumentan en la proporción*

$$1 : 3 : 5 : 7 : \cdots$$

Solución. Basta considerar que

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2,$$

Así la distancia recorrida entre $t = n$ y $t = n + 1$ será

$$\Delta x_n = \frac{1}{2}a(n+1)^2 - \frac{1}{2}an^2 = \frac{1}{2}a(2n+1)$$

o sea están en la proporción $1 : 3 : 5 : 7 : \cdots$

▲

EJERCICIO 6.12 *Si una partícula que se mueve en movimiento unidimensional sobre el eje OX parte del origen con velocidad V_0 y desacelera con aceleración constante $-a$, demuestre que la partícula regresará al origen en un tiempo*

$$t = \frac{2V_0}{a}.$$

Solución. Tenemos que

$$x = V_0 t - \frac{1}{2}at^2,$$

luego haciendo $x = 0$ resulta $V_0 t - \frac{1}{2}at^2 = 0$, y de aquí

$$t = 2\frac{V_0}{a}.$$

▲

EJERCICIO 6.13 *Dos partículas A y B que se mueven en movimiento unidimensional sobre el eje OX parten del origen. La partícula A parte en $t = 0$ con velocidad $V_A(0) = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La partícula B parte en $t = 1\,\mathrm{s}$ con velocidad $V_B(1) = -10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Ambas desaceleran con aceleración de magnitud $a = 6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Determine la máxima distancia entre ellas antes que se crucen.*

Solución. Para $t > 1$ tendremos

$$\begin{aligned} x_A(t) &= 10t - 3t^2, \\ x_B(t) &= -10(t-1) + 3(t-1)^2. \end{aligned}$$

Note que desaceleraciones significan aceleraciones contrarias a la velocidad inicial. La distancia que las separa es $x_A - x_B$ es decir

$$\Delta x = 10t - 3t^2 - (-10(t-1) + 3(t-1)^2) = 26t - 6t^2 - 13.$$

Su máximo se logra derivando e igualando a cero

$$26 - 12t = 0,$$

de donde $t = 2.1667\,\mathrm{s}$ y para ese tiempo

$$\Delta x = 26t - 6t^2 - 13 = 15.167\,\mathrm{m}.$$

EJERCICIO 6.14 (1) *Desde el origen de un sistema de coordenadas se lanza una partícula con rapidez v_0 formando un ángulo de 37^o con la horizontal y choca al cabo de $3\,\mathrm{s}$ con una pared en el punto (x, y). Si se cambia el ángulo de lanzamiento a 53^o con la horizontal, manteniendo la misma rapidez de lanzamiento v_0, la partícula impacta la pared en el punto $(x, y+7)$. a) Determinar el tiempo que demora el proyectil lanzado a 53^o sobre la horizontal en llegar a la pared. b)Determine la rapidez de lanzamiento de la partícula.*

Solución. Recordando que

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\alpha \\ y &= v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2, \end{aligned}$$

la condición del problema puede escribirse

$$\begin{aligned} x &= 3v_0 \cos 37 \\ y &= 3v_0 \sin 37 - \frac{1}{2} 10(3)^2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos 53 \\ y + 7 &= v_0 t \sin 53 - \frac{1}{2} 10 t^2, \end{aligned}$$

Eliminando x e y se obtiene

$$\begin{aligned} v_0 t \cos 53 &= 3v_0 \cos 37, \\ 3v_0 \sin 37 - 38 &= v_0 t \sin 53 - 5t^2. \end{aligned}$$

De la primera

$$t = \frac{3\cos 37}{\cos 53} = 3.98 \approx 4\,\mathrm{s},$$

y de la otra

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{38 - 5t^2}{3\sin 37 - t\sin 53} \\ &= 30.0\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned}$$

EJERCICIO 6.15 (1) *Por un tubo de diámetro despreciable ubicado en el suelo, sale un chorro de agua en un ángulo de 45^o con la horizontal (dentro del tubo las partículas de agua tienen distintas velocidades). El grueso del agua forma en el suelo un charco aproximadamente circular de radio* $2{,}2\,\mathrm{m}$ *cuyo centro se encuentra ubicado a* $12{,}2\,\mathrm{m}$ *del origen. Determine entre que valores varía la rapidez con que sale el grueso del agua por el tubo despreciando las fuerzas viscosas.*

Solución. De

$$\begin{aligned} x &= v_0 t\cos\alpha \\ y &= x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}, \end{aligned}$$

cuando $y = 0$ (punto de caída) se obtiene

$$x = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

Si $\alpha = 45^o$ ello se simplifica a

$$x = \frac{v_0^2}{g},$$

o bien

$$v_0 = \sqrt{gx}.$$

Pero de los datos se sabe que $12{,}2 - 2{,}2 < x < 12{,}2 + 2{,}2$ y para los extremos

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{10\times 10} = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \\ v_0 &= \sqrt{10\times 14{,}4} = 12{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned}$$

EJERCICIO 6.16 (1) *Una partícula en $t = 0$ pasa por el origen de un sistema de coordenadas fijo en el espacio con velocidad $\vec{v}_0 = 2\hat{\imath} - \hat{k}$ $\mathrm{m\,s^{-1}}$ moviéndose en el espacio con una aceleración que en cualquier instante está dada por la expresión $\vec{a}(t) = t\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ $\mathrm{m\,s^{-2}}$. Determine en $t = 2\,\mathrm{s}$: a) Los vectores posición y velocidad de la partícula. b)Las componentes tangencial y normal de la aceleración.*

Solución. De

$$\vec{a}(t) = t\hat{\imath} - \hat{\jmath},$$

integrando dos veces se deduce que

$$\vec{v}(t) = 2\hat{\imath} - \hat{k} + (\frac{t^2}{2}\hat{\imath} - t\hat{\jmath}),$$

$$\vec{r}(t) = (2\hat{\imath} - \hat{k})t + (\frac{t^3}{6}\hat{\imath} - \frac{t^2}{2}\hat{\jmath}),$$

si $t = 2$

$$\begin{aligned}
\vec{r}(2) &= (2\hat{\imath} - \hat{k})2 + (\frac{4}{3}\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}) = (\frac{16}{3}, -2, -2), \\
\vec{v}(2) &= 2\hat{\imath} - \hat{k} + (2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}) = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k} = (4, -2, -1)
\end{aligned}$$

Para evaluar las componentes tangencial y normal, determinemos

$$\hat{T}(2) = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(4, -2, -1)}{\sqrt{21}}$$

por lo tanto

$$a_T = \vec{a}(2) \cdot \hat{T}(2),$$

pero $\vec{a}(2) = (2, -1, 0)$, calculando resulta

$$a_T = \frac{10}{\sqrt{21}} = 2.18\,\mathrm{m\,s^{-2}},$$

y

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{5 - 2{,}18^2} = 0{,}49\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

▲

Ejercicio 6.17 (1) *Un tanque se desplaza con velocidad constante de* $10\hat{\imath}$ $\mathrm{m\,s^{-1}}$ *por una llanura horizontal. Cuando* $t = 0$*, lanza un proyectil que da en el blanco a* $9\,\mathrm{km}$*. Si la inclinación del cañón respecto de la horizontal es* 37^o*, determine la rapidez con que sale el proyectil respecto del cañón.*

Solución. Podemos escribir ($g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$)

$$\begin{aligned} x &= 9000 = (v_0 \cos 37 + 10)t, \\ y &= v_0 t \sin 37 - 5t^2 = 0, \end{aligned}$$

de la segunda

$$t = \frac{v_0 \sin 37}{5},$$

reemplace en la primera

$$9000 = (v_0 \cos 37 + 10)\frac{v_0 \sin 37}{5}$$

tomando $\sin 37 = 0{,}6$, y $\cos 37 = 0{,}8$

$$9000 = 0{,}096\, v_0^2 + 1.\,2 v_0$$

cuya solución positiva es $v_0 = 300{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

▲

Ejercicio 6.18 (1) *Desde el origen de un sistema de coordenadas se lanza un proyectil en dirección de un objeto situado en la posición* $(2h; h)$*. Al momento de lanzar el proyectil, se suelta el objeto que cae por efecto de la gravedad. Determine en función de* h *la separación entre el proyectil y el objeto cuando el proyectil haya recorrido horizontalmente una distancia* h*.*

Solución. Para el proyectil

$$\begin{aligned} x_P &= v_0 t \cos \alpha \\ y_P &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \end{aligned}$$

donde $\tan \alpha = 1/2$. Para el objeto

$$\begin{aligned} x_O &= 2h, \\ y_O &= h - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$

Cuando $x_P = v_0 t\cos\alpha = h$, entonces

$$\begin{aligned} x_P &= h, \\ y_P &= h\tan\alpha - \frac{1}{2}g(\frac{h^2}{v_0^2\cos^2\alpha}), \\ x_O &= 2h, \\ y_O &= h - \frac{1}{2}g(\frac{h^2}{v_0^2\cos^2\alpha}) \end{aligned}$$

la distancia será $d = \sqrt{(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2} = \sqrt{h^2 + (\frac{h}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}h$

▲

Ejercicio 6.19 (1) *Desde un barco que se mueve a* $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *se ve a otro barco que está a* $20\,\mathrm{km}$ *cruzando su trayectoria perpendicularmente con una rapidez de* $15\,\mathrm{km\,h^{-1}}$*. ¿ Después de cuánto tiempo la distancia que separa los barcos es mínima?*

Solución. Respecto a un sistema cartesiano, las coordenadas de los dos barcos pueden escribirse

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ y_1 &= 20t, \\ x_2 &= 15t, \\ y_2 &= 20, \end{aligned}$$

de modo que la distancia en función del tiempo será

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(15t)^2 + (20t - 20)^2} \\ &= 5\sqrt{(25t^2 - 32t + 16)} \end{aligned}$$

Un polinomio de segundo grado tiene un mínimo en el punto medio entre sus raíces que son

$$t_1 = \frac{16}{25} + \frac{12}{25}i,\ \ t_2 = \frac{16}{25} - \frac{12}{25}i,$$

o sea el tiempo es

$$t = \frac{16}{25} = 0{,}64\,\mathrm{h}$$

Ejercicio 6.20 (2) *Una partícula A es lanzada sobre una línea recta horizontal con cierta velocidad. Su aceleración es constante. Un segundo más tarde y desde el mismo lugar otra partícula B es lanzada tras la primera con una velocidad igual a la mitad de la de A y una aceleración el doble de A. Cuando B alcanza a A, las rapideces son $22\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y $31\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ respectivamente. Calcule la distancia que las partículas han viajado.*

Solución. Suponiendo el movimiento sobre el eje OX tenemos

$$\begin{aligned}
x_A &= vt + \frac{1}{2}at^2, \\
x_B &= (\frac{1}{2}v)(t-1) + \frac{1}{2}(2a)(t-1)^2, \\
v_A &= v + at, \\
v_B &= (\frac{1}{2}v) + (2a)(t-1).
\end{aligned}$$

Al igualar las distancias y simplificar

$$\frac{1}{2}vt = -\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}at^2 - 2at + a$$

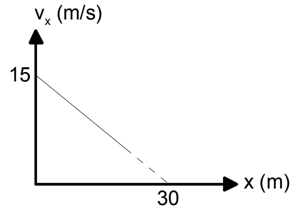
además

$$\begin{aligned}
v_A &= v + at = 22 \\
v_B &= (\frac{1}{2}v) + (2a)(t-1) = 31
\end{aligned}$$

Es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuyas soluciones son $a = 5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $t = 4{,}0\,\mathrm{s}$, $v = 2{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y la distancia resulta

$$d = vt + \frac{1}{2}at^2 = 48{,}0\,\mathrm{m}$$

Ejercicio 6.21 (2) *La velocidad de una partícula en el movimiento rectilíneo decrece desde $15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a una velocidad que tiende a cero, cuando $x = 30\,\mathrm{m}$ tal como lo muestra la figura. Demuestre que la partícula nunca alcanzará los $30\,\mathrm{m}$ y calcule la aceleración cuando $x = 18\,\mathrm{m}$.*



Solución. La función lineal del gráfico corresponde a

$$\frac{v_x}{15} + \frac{x}{30} = 1,$$

de donde tenemos

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}x = 15,$$

$$t = \int_0^x \frac{dx}{15 - \frac{1}{2}x} = 2\ln 30 - 2\ln(30 - x),$$

que tiende a infinito si $x \to 30$. Cuando $x = 18$

$$t = 2\ln 30 - 2\ln(30 - 18) = 1.83\,\mathrm{s},$$

la rapidez resulta

$$v_x = 15 - \frac{1}{2}18 = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}},$$

y la aceleración será (derivando)

$$a_x = -\frac{1}{2}v_x = -3\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

▲

Ejercicio 6.22 (1) *Una partícula se mueve a lo largo de la curva $r = 3\theta$ tal que $\theta = 2t^3$ donde t se mide en segundos, r en metros y θ en radianes. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula en coordenadas polares para $\theta = 0{,}2$ rad.*

Solución. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}, \\
\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta},
\end{aligned}$$

siendo $r = 6t^3$, $\dot{r} = 18t^2$, $\ddot{r} = 36t$, $\dot{\theta} = 6t^2$, $\ddot{\theta} = 12t$ y el tiempo dado de

$$\begin{aligned} 2t^3 &= 0{,}2, \\ t &= 0{,}464\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

$t = 0{,}464$
$\dot{r} = 18t^2 = 3.\,87$
$r\dot{\theta} = (6t^3)(6t^2) = 0{,}77$

$$\vec{v} = 3{,}875\hat{r} + 0{,}774\hat{\theta}$$

$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 36t - (6t^3)(6t^2)^2 = 15.\,704$
$(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 2(18t^2)(6t^2) + 6t^3(12t) = 13.\,349$

$$\vec{a} = 15.\,704\hat{r} + 13.\,349\,\hat{\theta}$$

▲

Ejercicio 6.23 (2) *Desde una altura de* 20 m*, con respecto al eje X de un sistema de coordenadas ubicado en Tierra, se lanza una partícula A con una rapidez de* $50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *y formando un ángulo de* 30^o *con la horizontal. Simultáneamente y desde la posición* $X = 200\,\mathrm{m}$ *se dispara verticalmente hacia arriba un proyectil B de modo que cuando la partícula A llega a Tierra, el proyectil B está en su altura máxima. Calcular: a)el tiempo transcurrido para que la distancia que separa A de B sea mínima; b)la velocidad relativa de A respecto a B en* $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Solución. Usando $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ de

$$\begin{aligned} x_A &= 50t\cos 30 = 25\sqrt{3}t \\ y_A &= 20 + 50t\sin 30 - 5t^2 = 20 + 25t - 5t^2, \\ x_B &= 200, \\ y_B &= v_B(0)t - 5t^2. \end{aligned}$$

El tiempo para que la partícula A llegue a la Tierra ($y_A = 0$) se obtiene de

$$20 + 50t\sin 30 - 5t^2 = 0$$

y resulta $t = 5.\,70\,\mathrm{s}$. Para ese tiempo debe ser $v_B(t) = 0$, entonces

$$v_B(0) - 10t = v_B(0) - 10 \times 5{,}70 = 0$$

de donde

$$v_B(0) = 57{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Luego

$$y_B(t) = 57t - 5t^2.$$

La distancia entre los dos objetos será

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

y reemplazando las coordenadas

$$\begin{aligned} x_A - x_B &= 25\sqrt{3}t - 200, \\ y_A - y_B &= 20 + 25t - 5t^2 - (57t - 5t^2) \\ &= 20 - 32t \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(25\sqrt{3}t - 200)^2 + (20 - 32t)^2} \\ &= \sqrt{2899t^2 - 10\,000\sqrt{3}t + 40\,400 - 1280t}. \end{aligned}$$

El mínimo ocurre en el punto medio entre las raíces de $2899t^2 - 10\,000\sqrt{3}t + 40\,400 - 1280t = 0$, que son: $t = 3.\,208 + 1.\,909i$ y $t = 3.\,208 - 1.\,909i$, de modo que el tiempo es $t = 3{,}21\,\mathrm{s}$. En este instante las velocidades son

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= (25\sqrt{3}, 25 - 10t) \\ &= (25\sqrt{3}, 25 - 32{,}1) \\ \vec{v}_B &= (0, 57 - 32{,}1) \end{aligned}$$

y la velocidad relativa resulta

$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = \left(25\sqrt{3}, -32{,}0\right) = (43.\,30, -32{,}0)$$

▲

EJERCICIO 6.24 (1) *Un cañón está montado sobre un promontorio de altura h. Se dispara un proyectil con una rapidez v_0 y ángulo de elevación α. Demuestre que el alcance horizontal d, distancia a lo largo del plano horizontal que pasa por la base del promontorio, es:*

$$d = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}\left[v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}\right].$$

Solución. La ecuación de la trayectoria es

$$y = h + x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

y cuando $y = 0$ debemos despejar x de una ecuación de segundo grado, resultando

$$\begin{aligned} x &= d = \frac{\tan\alpha \pm \sqrt{\tan^2\alpha + \frac{4gh}{2v_0^2\cos^2\alpha}}}{\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}} \\ &= \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}(\tan\alpha \pm \sqrt{\tan^2\alpha + \frac{2gh}{v_0^2\cos^2\alpha}}) \\ &= \frac{v_0\left(\cos\alpha\right)}{g}(v_0\sin\alpha \pm \sqrt{\left(v_0^2\sin^2\alpha + 2gh\right)}) \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 6.25 (1) *Un cañón es montado sobre un promontorio de altura h. Se dispara un proyectil con una rapidez de salida v_0. Demuestre que el alcance horizontal d es máximo cuando el ángulo de elevación es:*

$$\alpha = \sin^{-1}\sqrt{\frac{v_0^2}{2v_0^2 + 2gh}}.$$

Solución. La ecuación de la parábola de seguridad es

$$y = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2},$$

y para llegar a puntos sobre la parábola de seguridad

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Luego, el alcance máximo x al nivel del suelo se despeja haciendo $y = 0$ de modo que

$$\begin{aligned} 0 &= h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}, \\ x &= \sqrt{(v_0^2 + 2gh)}\frac{v_0}{g}, \end{aligned}$$

resultando

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{v_0^2}{g\sqrt{(v_0^2+2gh)}\frac{v_0}{g}} = \frac{v_0}{\sqrt{(v_0^2+2gh)}},$$

y

$$\sin\alpha = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{\left(v_0^2+2gh\right)}}}{\sqrt{1+\frac{v_0^2}{v_0^2+2gh}}} = \frac{v_0}{\sqrt{(2v_0^2+2gh)}},$$

que prueba el resultado.

Ejercicio 6.26 (2) *Una partícula es lanzada al espacio de modo que su alcance sobre el plano horizontal es R y su máxima altura h. Demuestre que el, alcance horizontal máximo, con la misma rapidez de salida v_0, es:*

$$2h + \frac{R^2}{8h}.$$

Solución. Sabemos que el alcance horizontal y altura máxima son

$$\begin{aligned} R &= \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}, \\ h &= \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}, \end{aligned}$$

y que el máximo alcance horizontal es

$$R_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Debemos eliminar α entre las dos primeras, así

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}},$$

reemplazamos en la primera

$$\begin{aligned} R &= \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \\ &= \frac{2v_0^2}{g}\sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}}\sqrt{1-(\sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}})^2} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{h}\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}-2h\right)}, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{R^2}{8h} = \frac{v_0^2}{g} - 2h,$$

y finalmente

$$R_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g} = 2h + \frac{R^2}{8h}.$$

EJERCICIO 6.27 (2) *Se monta un cañón sobre la base de un plano inclinado que forma un ángulo β con la horizontal. Este cañón dispara un proyectil hacia la parte superior del plano, siendo el α ángulo que forma la velocidad de salida del proyectil con el plano. Calcule el ángulo de elevación del plano para que el proyectil impacte sobre el plano inclinado paralelamente a la horizontal.*

Solución. La ecuación de la trayectoria es con α' ángulo de disparo respecto a la horizontal

$$y = x\tan\alpha' - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha'},$$

y cuando

$$y = x\tan\beta,$$

impacta al plano inclinado. En esa coordenada debe ser

$$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha' - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha'} = 0.$$

De las dos primeras resulta

$$\tan\alpha' - \frac{gx}{2v_0^2\cos^2\alpha'} = \tan\beta.$$

De la tercera despejamos x y reemplazamos en la última

$$x = \frac{v_0^2\cos\alpha'\sin\alpha'}{g},$$

luego

$$\begin{aligned}\tan\alpha' - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha'}\frac{v_0^2\cos\alpha'\sin\alpha'}{g} &= \tan\beta,\\ \frac{1}{2}\tan\alpha' &= \tan\beta.\end{aligned}$$

Pero $\alpha' = \alpha + \beta$ de manera

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= 2\tan\beta,\\ \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} &= 2\tan\beta\end{aligned}$$

de donde

$$\tan\beta = \frac{1}{4\tan\alpha}\left(1-\sqrt{(1-8\tan^2\alpha)}\right).$$

Hay solución sólo si $8\tan^2\alpha < 1$, por ejemplo para

$\tan\alpha = 1/\sqrt{8}$, resulta $\alpha = 0{,}339\,8$

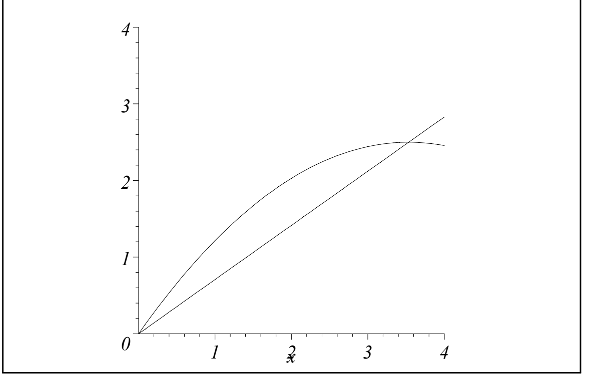
$\tan\beta = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$

$\beta = 0{,}615$

$\alpha' = 0{,}339\,8 + 0{,}615 = 0{,}954\,8$

$y = x\tan 0{,}955 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2 0{,}955}$

$y = 0{,}707\ x$, si $g = 10$, $v_0 = 5$ el gráfico es:



Ejercicio 6.28 (3) *Un proyectil se dispara con rapidez inicial v_0, y ángulo de inclinación variable. ¿Para qué ángulo el alcance del proyectil será máximo a lo largo de la recta $y = x\tan\theta$?.*

Solución. Tenemos la ecuación de la parábola de seguridad

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2},$$

y para llegar a puntos sobre la parábola de seguridad

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Además debe ser

$$y = x\tan\theta.$$

De la primera y la tercera

$$\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} = x\tan\theta,$$

de donde

$$x = \left(-\tan\theta + \sqrt{(\tan^2\theta + 1)}\right)\frac{v_0^2}{g},$$

y luego

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{1}{-\tan\theta + \sqrt{(\tan^2\theta + 1)}} = \tan\theta + \sec\theta,$$

que prueba el resultado. Sin embargo hay un resultado más simple. En efecto de la identidad

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$$

resulta

$$\tan\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta + \sec\theta,$$

luego

$$\tan\alpha = \tan\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{2},$$

de donde

$$\alpha = \frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}.$$

Por ejemplo si $\theta = 0 \to \alpha = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2} \to \alpha = \frac{\pi}{2}$.

EJERCICIO 6.29 (1) *Un aeroplano que vuela horizontalmente a* $1\,\mathrm{km}$ *de altura y con una rapidez de* $200\ \mathrm{km\ h^{-1}}$*, deja caer una bomba contra un barco que viaja en la misma dirección y sentido con una rapidez de* $20\ \mathrm{km\ h^{-1}}$*. Pruebe que la bomba debe soltarse cuando la distancia horizontal entre el avión y el barco es de* $705\,\mathrm{m}$ *(considere* $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$*).*

Solución. Colocando el origen al nivel del mar, bajo el avión en el instante de soltar la bomba, tenemos ($1\ \mathrm{km\ h} = 1000/3600 = \frac{5}{18} = 0{,}278\,\mathrm{m\,s^{-1}}$)

$$\begin{aligned} x_P &= 200\times\frac{1000}{3600}t, \\ y_P &= 1000-5t^2, \\ x_B &= d+20\times\frac{1000}{3600}t, \\ y_B &= 0. \end{aligned}$$

Para dar en el blanco, igualamos

$$\begin{aligned} 200\times\frac{1000}{3600}t &= d+20\times\frac{1000}{3600}t, \\ 1000-5t^2 &= 0, \end{aligned}$$

de la última

$$t = \sqrt{200}\,\mathrm{s}$$

y de la anterior

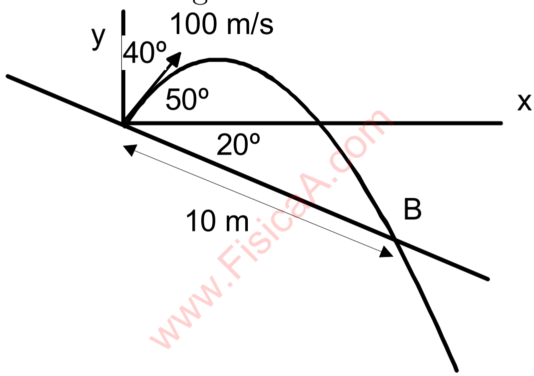
$$d = (200\times\frac{1000}{3600}-20\times\frac{1000}{3600})\sqrt{200} = 707{,}1\,\mathrm{m}$$

Ejercicio 6.30 (2) *Se deja caer una pelota verticalmente sobre un punto A de un plano inclinado que forma un ángulo de 20^o con un plano horizontal. La pelota rebota formando un ángulo de 40^o con la vertical. Sabiendo que el próximo rebote tiene lugar en B a distancia* 10 m *de A más abajo del plano, calcule:*

a) *el módulo de la velocidad con la cual rebota la pelota en A,*

b) *el tiempo transcurrido desde que la pelota rebota en A hasta que la pelota rebota en B.*

Solución. De acuerdo a la figura tenemos



$$y = x \tan 50 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 50},$$

poniendo la condición que pase por B con coordenadas $x_B = 10 \cos 20$, $y_B = -10 \sin 20$, debemos despejar v_0

$$-10 \sin 20 = 10 \cos 20 \tan 50 - \frac{g(10 \cos 20)^2}{2v_0^2 \cos^2 50},$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{5g(\cos 20) \sec^2 50}{(\tan 50 + \tan 20)}}.$$

El tiempo lo obtenemos de $x_B = v_0(\cos 50)t_B$ resultano

$$t_B = \frac{10 \cos 20}{v_0(\cos 50)} = \frac{10 \cos 20}{(\cos 50)} \sqrt{\frac{(\tan 50 + \tan 20)}{5g(\cos 20) \sec^2 50}} = 10\sqrt{\cos 20 \frac{(\tan 50 + \tan 20)}{5g}}$$

Ejercicio 6.31 (1) *Si el alcance máximo horizontal de un proyectil es R, calcular el ángulo α que debe usarse, con la misma rapidez de lanzamiento, para que el proyectil impacte en un blanco situado al mismo nivel de lanzamiento y a una distancia $R/2$.*

Solución. Sabemos que

$$R = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}, \;\; R_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g},$$

Si $R_{\text{máx}} = R/2$ entonces

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}, \;\; 2\alpha = 30^o, \;\; \alpha = 15^o.$$

Ejercicio 6.32 (2) *Una partícula se mueve a lo largo de una parábola $y = x^2$ de tal manera que para todo instante se cumple que $v_x = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Calcule la velocidad y aceleración de la partícula cuando $x = 2/3\,\mathrm{m}$.*

Solución. Este problema requiere de conocimientos de cálculo. En efecto sabemos que

$$\frac{dx}{dt} = 3, \;\; y = x^2,$$

derivando la segunda

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} = 6x,$$

derivando de nuevo,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \;\; \frac{d^2y}{dt^2} = 6\frac{dx}{dt} = 18,$$

la aceleración ha resultado constante

$$\vec{a} = (0, 18)\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Para $x = 2/3$ resulta $y = 4/9$ y la velocidad

$$\vec{v} = (3, 12/3) = (3, 4)\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Ejercicio 6.33 (1) *Una partícula se mueve en el plano XY de acuerdo a la ley: $a_x = -4\sin t$; $a_y = 3\cos t$. Se sabe que cuandot $= 0$, $x = 0$; $y = 3$; $v_x = 4$; $v_y = 0$. Encuentre la expresión cartesiana de la trayectoria y además calcule la velocidad cuando $t = \pi/4$. Exprese sus magnitudes en unidades SI.*

Solución. Tenemos que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\sin t,\ \frac{d^2y}{dt^2} = 3\cos t,$$

integrando dos veces con las condiciones iniciales dadas resulta

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 4 + 4(\cos t - 1) = 4\cos t,\\ \frac{dy}{dt} &= 3\sin t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 4\sin t,\\ y &= 3 - 3(\cos t - 1) = 6 - 3\cos t,\end{aligned}$$

Eliminando el tiempo resulta la ecuación de la trayectoria

$$\frac{x^2}{16} + (\frac{y-6}{3})^2 = 1.$$

La velocidad es

$$\vec{v} = (4\cos t, 3\sin t)$$

y en $t = \pi/4$

$$\vec{v} = (2\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}) = (2.83, 2.12)\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

▲

Ejercicio 6.34 (1) *Una partícula se mueve sobre el plano XY de manera que sus coordenadas están dadas por $x = t$; $y = t^3/6$, siendo t la variable independiente tiempo. Determine para $t = 2\,\mathrm{s}$ la magnitud de la aceleración, las componentes normal y tangencial de la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria en dicho instante.*

Solución. Tenemos
$$x = t,\ y = \frac{t^3}{6},$$
derivando dos veces
$$v_x = 1,\ v_y = \frac{t^2}{2},$$

$$a_x = 0,\ a_y = t,$$
El vector unitario tangente es
$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(1, \frac{t^2}{2})}{\sqrt{1 + \frac{t^4}{4}}}.$$
En $t = 2\,\mathrm{s}$ calculamos
$$\begin{aligned} v_x &= 1,\ v_y = 2, \\ a_x &= 0,\ a_y = 2, \\ \hat{T} &= \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

luego
$$\begin{aligned} a &= 2\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \\ v &= \sqrt{5}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ a_T &= \vec{a}\cdot\hat{T} = a_y T_y = 2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 1.79\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \\ a_N &= \sqrt{a^2 - a_T^2} = \frac{2}{5}\sqrt{5} = 0{,}89\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \\ \rho &= \frac{v^2}{a_N} = \frac{5}{2}\sqrt{5} = 5.59\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 6.35 (1) *Una partícula se mueve describiendo una circunferencia de acuerdo a la ley $s = t^3 + 2t^2$, donde s se mide en metros y t en segundos. Si la magnitud de la aceleración de la partícula es $16\sqrt{2}\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ cuando $t = 2\,\mathrm{s}$, calcule el radio de la circunferencia.*

Solución. De los datos

$$s = R\theta = t^3 + 2t^2,$$

de donde

$$\dot{\theta} = \frac{3t^2 + 4t}{R}, \ \ddot{\theta} = \frac{6t + 4}{R}$$

La aceleración en polares tiene las dos componentes

$$\vec{a} = (-R\dot{\theta}^2, R\ddot{\theta}) = (-\frac{(3t^2 + 4t)^2}{R}, 6t + 4),$$

si $t = 2\,\mathrm{s}$

$$\vec{a} = \left(-\frac{400}{R}, 16\right),$$

y se sabe que la magnitud es

$$\sqrt{\frac{400^2}{R^2} + 16^2} = 16\sqrt{2},$$

de donde

$$R = 25\,\mathrm{m}.$$

Ejercicio 6.36 (1) *Una partícula describe una trayectoria dada por las siguientes ecuaciones paramétricas: $x = t$; $y = t^2/2$. Determinar la curva y el radio de curvatura.*

Solución. Elimine el tiempo y se obtiene la curva

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

El radio de curvatura es

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = (1 + x^2)^{3/2} = (1 + t^2)^{3/2}.$$

Ejercicio 6.37 (1) *Dada la curva: $x = t$; $y = t^2$; calcular:a) la curvatura K, b) el radio de curvatura en el punto $(\sqrt{a}; a)$) .*

Solución. Similarmente resulta

$$\begin{aligned} y &= x^2, \\ \rho &= \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+4x^2)^{3/2}}{2}, \\ K &= \frac{1}{\rho} = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

y en $x = \sqrt{a}$

$$\rho = \frac{(1+4a)^{3/2}}{2}.$$

▲

Ejercicio 6.38 (2) *Demuestre que la curvatura de la elipse* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ *es:*

$$K = \frac{a^4 b}{\left[a^2\left(a^2 - x^2\right) + b^2 x^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Solución. Es conveniente derivar en forma implícita

$$\begin{aligned} \frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} &= 0, \\ y' &= -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \\ y'' &= -\frac{b^2}{a^2 y} + \frac{b^2 x}{a^2 y^2} y' = -\frac{b^2}{a^2 y} - \frac{b^2 x}{a^2 y^2} \frac{b^2 x}{a^2 y} \\ &= -\frac{b^2}{a^2 y} - \frac{b^4 x^2}{a^4 y^3}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} K &= \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\frac{b^2}{a^2 y} + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^3}}{(1+\frac{b^4 x^2}{a^4 y^2})^{3/2}} = \frac{a^2 b^2\left(a^2 y^2 + b^2 x^2\right)}{\left(a^4 y^2 + b^4 x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

pero

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \Longrightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

luego

$$K = \frac{a^4b^4}{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^4b}{(a^2(a^2 - x^2) + b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

EJERCICIO 6.39 (1) *La aceleración de una partícula es: $\vec{a} = 2e^{-t}\hat{\imath} + 5\cos t\,\hat{\jmath}$. En el instante $t = 0$ se encuentra en el punto $P(1;3)$ siendo su velocidad $\vec{v} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$. Encuentre su posición y velocidad para cualquier instante $t > 0$.*

Solución. Tenemos que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 2e^{-t}\hat{\imath} + 5\cos t\,\hat{\jmath},$$

integrando con las condiciones iniciales dadas

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2(1 - e^{-t})\hat{\imath} + 5\sin t\,\hat{\jmath} \\
&= \left(6 - 2e^{-t}\right)\hat{\imath} + (5\sin t - 3)\,\hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

Integrando de nuevo

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \left(6t - 2(1 - e^{-t})\right)\hat{\imath} + (5(1 - \cos t) - 3t)\,\hat{\jmath} \\
&= (2e^{-t} + 6t - 1)\hat{\imath} + (8 - 5\cos t - 3t)\hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

EJERCICIO 6.40 (1) *Una partícula se mueve sobre una trayectoria tal que su vector de posición en cualquier instante es: $\vec{r} = t\hat{\imath} + \frac{t^2}{2}\hat{\jmath} + t\hat{k}$. Determine: a)la velocidad, b)la rapidez c)la aceleración, d)la magnitud de la aceleración tangencial y e)la magnitud de la aceleración normal.*

Solución. De

$$\vec{r} = t\hat{\imath} + \frac{t^2}{2}\hat{\jmath} + t\hat{k},$$

derivando dos veces

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \hat{\imath} + t\hat{\jmath} + \hat{k} = (1, t, 1), \\
v &= \sqrt{2 + t^2}, \\
\vec{a} &= \hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

El vector unitario tangente es

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(1, t, 1)}{\sqrt{2 + t^2}},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} a_T &= \vec{a} \cdot \hat{T} = \frac{t}{\sqrt{2 + t^2}}, \\ a_N &= \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{1 - \frac{t^2}{2 + t^2}} = \sqrt{\frac{2}{2 + t^2}}. \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 6.41 (2) *Una partícula se mueve en el plano XY de tal manera que:* $a_x = 4pe^{4t}$ *y* $v_y = 2\pi q \cos 2\pi t$ *donde* p *y* q *son constantes positivas. Cuando* $t = 0$; $x = p/4$; $y = 0$; $v_x = p$. *Determinar: a)el vector posición, el vector velocidad y el vector aceleración de la partícula en función del tiempo; b)la trayectoria de la partícula.*

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = 4pe^{4t}, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 2\pi q \cos 2\pi t. \end{aligned}$$

Para la aceleración derivamos la segunda

$$a_y = -4\pi^2 q \sin 2\pi t,$$

luego

$$\vec{a} = (4pe^{4t}, -4\pi^2 q \sin 2\pi t).$$

Para la velocidad debemos integrar la primera

$$v_x = p + \int_0^t 4pe^{4t} dt = pe^{4t},$$

por lo tanto la velocidad es

$$\vec{v} = (pe^{4t}, 2\pi q \cos 2\pi t).$$

Integramos de nuevo

$$\vec{r} = \frac{p}{4}\hat{\imath} + (\frac{1}{4}pe^{4t} - \frac{1}{4}p, q\sin 2\pi t) = (\frac{1}{4}pe^{4t}, q\sin 2\pi t).$$

Para obtener la trayectoria debemos eliminar t entre

$$x = \frac{1}{4}pe^{4t},$$

y

$$y = q\sin 2\pi t,$$

obteniendo

$$y = q\sin(\frac{\pi}{2}\ln\frac{4x}{p})$$

▲

Ejercicio 6.42 (2) *Una partícula se mueve en el plano XY describiendo la curva* $y = \ln x$*; calcule: a) la rapidez en función de* x *y* $\dot{x}$ *, b) la magnitud de la aceleración en función de* x *,* $\dot{x}$ *y* $\ddot{x}$ *, c)si* $\dot{x} = c$ *, calcule en* $x = a$*, las magnitudes de la aceleración tangencial y normal.*

Solución. De

$$y = \ln x,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{1}{x}\dot{x}, \\ \ddot{y} &= \frac{1}{x}\ddot{x} - \frac{1}{x^2}\dot{x}^2, \end{aligned}$$

de modo que

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + (\frac{1}{x}\dot{x})^2} = \dot{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + (\frac{1}{x}\ddot{x} - \frac{1}{x^2}\dot{x}^2)^2}.$$

Si $\dot{x} = c$ entonces $\ddot{x} = 0$ y sabemos que $x = a$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} v &= c\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}, \\ a_T &= \frac{dv}{dt} = c\frac{-\frac{2}{x^2}\dot{x}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\ &= c^2\frac{-\frac{2}{x^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{c^2}{a\sqrt{(a^2+1)}} \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\ddot{x}^2 + (\frac{1}{x}\ddot{x} - \frac{1}{x^2}\dot{x}^2)^2} = \frac{\dot{x}^2}{x^2} = \frac{c^2}{a^2}, \\ a_N &= \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{\frac{c^4}{a^4} - \frac{c^4}{a^2(a^2+1)}} = \frac{c^2}{a^2\sqrt{(a^2+1)}}. \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 6.43 *Una partícula se mueve de modo que sus coordenadas cartesianas están dadas como funciones del tiempo por*

$$\begin{aligned} x &= 3t \\ y &= 2t - 5t^2 \end{aligned}$$

Determine a)Las componentes cartesianas de la velocidad y de la aceleración. b) Las componentes polares de la velocidad y de la aceleración. c)Las componente normal y tangencial de la velocidad y aceleración. d)La ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas. e)La ecuación de la trayectoria en coordenadas polares.

Solución.

$$\begin{aligned} x &= 3t \\ y &= 2t - 5t^2 \end{aligned}$$

a) $v_x = 3$, $v_y = 2 - 10t$, $a_x = 0$, $a_y = -10$,

b) $\hat{r} = \frac{3t\hat{\imath}+(2t-5t^2)\hat{\jmath}}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}}, \hat{\theta} = \hat{k}\times\hat{r} = \frac{3t\hat{\jmath}-(2t-5t^2)\hat{\imath}}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}}$

$$\begin{aligned} v_r &= \vec{v}\cdot\hat{r} = \frac{9t+(2t-5t^2)(2-10t)}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}} \\ v_\theta &= \vec{v}\cdot\hat{\theta} = \frac{3t(2-10t)-(2t-5t^2)3}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}} \\ a_r &= \vec{a}\cdot\vec{r} = \frac{(-10)(2t-5t^2)}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}} \\ a_\theta &= \vec{a}\cdot\hat{\theta} = \frac{(-10)3t}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}} \end{aligned}$$

c) $\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{3\hat{\imath}+(2-10t)\hat{\jmath}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}, \hat{N} = \hat{T}\times\hat{k} = \frac{-3\hat{\jmath}+(2-10t)\hat{\imath}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$ entonces

$$\begin{aligned} v_T &= \vec{v}\cdot\hat{T} = v = \sqrt{9+(2-10t)^2} \\ v_N &= 0 \\ a_T &= \vec{a}\cdot\hat{T} = \frac{-10(2-10t)\hat{\jmath}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}} \\ a_N &= \vec{a}\cdot\hat{N} = \frac{30}{\sqrt{9+(2-10t)^2}} \end{aligned}$$

d)

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}x^2$$

e) Sería necesario expresar $r = r(\theta)$ donde

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} = \frac{2-5t}{3} \end{aligned}$$

de donde

$$t = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}\tan\theta$$

y luego con algo de álgebra resulta

$$r = \frac{3}{5}\left(2-3\tan\theta\right)\sqrt{(1+\tan^2\theta)}$$

▲

EJERCICIO 6.44 *Una partícula se mueve sobre una elipse de semi ejes a y b centrada en el origen de un sistema de coordenadas con rapidez constante v_0, siendo la ecuación de la elipse:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a) Determine la magnitud de la aceleración de la partícula en los puntos más alejado y más cercano de la partícula al centro. b) El tiempo que emplea la partícula en recorrer toda la elipse. c) La determinación de la ecuación paramétrica de la trayectoria con parámetro tiempo es un problema complicado, pero explique el método a seguir.

Solución. De la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

deseamos obtener el radio de curvatura. Derivando implícitamente obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{yy'}{b^2} &= -\frac{x}{a^2} \\ y' &= -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad y'' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{y} + \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y^2}y' = -\frac{b^4}{a^2y^3} \end{aligned}$$

entonces

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+\frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2})^{3/2}}{\frac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4}$$

Si $a > b$ el punto más alejado es $x = a$, $y = 0$, $\rho = \frac{b^2}{a}$. El punto más cercano es $x = 0$, $y = b$, $\rho = \frac{a^2}{b}$

a)

$$a = \frac{v_0^2}{\rho} = \begin{cases} \frac{v_0^2 a}{b^2} \\ \frac{v_0^2 b}{a^2} \end{cases}$$

b) La rapidez constante significa que

$$\frac{ds}{dt} = v_0,$$

de donde

$$\begin{aligned}\sqrt{1+(y')^2}\frac{dx}{dt} &= v_0\\ dt &= \frac{1}{v_0}\sqrt{1+(y')^2}dx\end{aligned}$$

junto a

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= 1\\ y' &= \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\frac{b}{a}x\\ dt &= \frac{1}{v_0}\frac{1}{a}\sqrt{\left(\frac{b^2x^2+a^4-a^2x^2}{a^2-x^2}\right)}dx\end{aligned}$$

si la última expresión pudiera integrarse se tendría $t = t(x)$ y problema resuelto.

▲

Ejercicio 6.45 *La ecuación de una elipse en coordenadas polares puede escribirse como*

$$r = \frac{c}{1-e\cos\theta}$$

siendo c y e constantes. Si el ángulo varía proporcionalmente al tiempo t con constante de proporcionalidad λ, determine las componentes polares de la velocidad y de la aceleración en función del tiempo.

Solución. Aquí

$$r = \frac{c}{1-e\cos\theta},\ \ \theta = \lambda t$$

las componentes polares están dadas por

$$\begin{aligned}
v_r &= \dot{r} = -\frac{e\lambda c \sin \lambda t}{(1 - e\cos \lambda t)^2} \\
v_\theta &= r\dot{\theta} = \frac{\lambda c}{1 - e\cos \lambda t} \\
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - r\lambda^2 \\
&= \left(-\frac{e\cos \lambda t}{(1 - e\cos \lambda t)} + \frac{2e^2 \sin^2 \lambda t}{(1 - e\cos \lambda t)^2} - 1\right)\frac{\lambda^2 c}{1 - e\cos \lambda t} \\
a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 2\dot{r}\lambda = -\frac{2e\lambda^2 c \sin \lambda t}{(1 - e\cos \lambda t)^2}
\end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 6.46 *Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio R con aceleración angular constante partiendo del reposo. Si la partícula realiza n vueltas completas a la circunferencia en el primer segundo, determine la aceleración angular de la partícula. Determine además el número de vueltas que realiza la partícula durante el siguiente segundo del movimiento.*

Solución. Aquí

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

entonces

$$2\pi n = \frac{1}{2}\alpha, \;\; \alpha = 4\pi n$$

y durante el siguiente segundo realiza

$$\frac{\theta(2) - \theta(1)}{2\pi} = n(2^2 - 1^2) = 3n$$

vueltas.

▲

EJERCICIO 6.47 *Desde lo alto de un edificio, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una rapidez de $12{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La pelota llega a tierra $4{,}25\,\mathrm{s}$, después. Determine: a) La altura que alcanzó la pelota respecto del edificio. b)La rapidez de la pelota al llegar al suelo.*

Solución. La altura en función del tiempo será

$$y = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

luego, tomando $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

$$y = h + 12{,}5t - 5t^2$$

siendo

a) $h + 12{,}5(4{,}25) - 5(4{,}25)^2 = 0,\ h = 37.\,19\,\mathrm{m}$

b) $v_y = 12{,}5 - 10t = 12{,}5 - 10(4{,}25) = -30{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Ejercicio 6.48 *Se deja caer un cuerpo desde una altura inicial de* $33\,\mathrm{m}$*, y simultáneamente se lanza hacia abajo otro cuerpo con una rapidez inicial de* $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*. Encontrar el instante en que la distancia entre ellos es de* $18\,\mathrm{m}$*.*

Solución.

$$\begin{aligned} y_1 &= 33 - 5t^2 \\ y_2 &= 33 - t - 5t^2 \end{aligned}$$

$$y_1 - y_2 = t$$

entonces la distancia entre ellos es $18\,\mathrm{m}$ a los $18\,\mathrm{s}$.

Ejercicio 6.49 *Un cuerpo que cae, recorre en el último segundo* $68{,}3\,\mathrm{m}$*. Encontrar la altura desde donde cae.*

Solución. Suponiendo que se soltó del reposo

$$y = h - 5t^2$$

el tiempo en que llega al suelo es $t = \sqrt{\frac{h}{5}}$la distancia recorrida en el último segundo será

$$\begin{aligned} & y(\sqrt{\frac{h}{5}} - 1) - y(\sqrt{\frac{h}{5}}) \\ = \ & 5(\sqrt{\frac{h}{5}})^2 - 5(\sqrt{\frac{h}{5}} - 1)^2 = 68{,}3 \end{aligned}$$

y resolviendo

$$h = 268.\,6\,\mathrm{m}$$

EJERCICIO 6.50 *Desde lo alto de un acantilado, se deja caer una piedra. Desde la misma altura se lanza verticalmente hacia abajo una segunda piedra, 2 s más tarde, con una rapidez de $30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Si ambas golpean el piso simultáneamente, encuentre la altura del acantilado.*

Solución.

$$\begin{aligned} y_1 &= h - 5t^2 \\ y_2 &= h - 30(t-2) - 5(t-2)^2 \end{aligned}$$

siendo al mismo tiempo

$$\begin{aligned} y_1 &= h - 5t^2 = 0 \\ y_2 &= h - 30(t-2) - 5(t-2)^2 = 0 \end{aligned}$$

de aquí $t = 4\,\mathrm{s}$,

$$h = 80\,\mathrm{m}$$

EJERCICIO 6.51 *Desde el piso, se lanza hacia arriba una pelota con una rapidez de $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Calcule el tiempo transcurrido entre los dos instantes en que su velocidad tiene una magnitud de $2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y la distancia respecto al piso que se encuentra la pelota en ese instante.*

Solución.

$$\begin{aligned} y &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y &= v_0 - gt \end{aligned}$$

de aquí

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 - gt_1 = 2{,}5 \\ v_y &= v_0 - gt_2 = -2{,}5 \end{aligned}$$

de donde

$$t_2 - t_1 = \frac{5}{g} = 0{,}5\,\mathrm{s}$$

Además de

$$40 - gt_1 = 2{,}5$$

despejamos

$$t_1 = \frac{37{,}5}{10} = 3{,}75\,\mathrm{s}$$

y por lo tanto

$$y_1 = 40(3{,}75) - 5(3{,}75)^2 = 79.\,69\,\mathrm{m}$$

EJERCICIO 6.52 *Una roca cae libremente recorriendo la segunda mitad de la distancia de caída en* 3 s. *Encuentre la altura desde la cual se soltó y el tiempo total de caída.*

Solución.

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

el tiempo en que alcanza $h/2$ es $t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}$ y el tiempo en que $h = 0$ es $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

a) por lo tanto el tiempo empleado en la segunda parte de recorrido es

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}} = 3 \Longrightarrow h = 524.\,6\,\mathrm{m}$$

b)

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{524.\,6}{5}} = 10{,}2\,\mathrm{s}$$

EJERCICIO 6.53 *Se dispara un proyectil desde la cima de una colina de* 150 m *de altura con una rapidez de* $180\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *y formando un ángulo de* 30^o *con la horizontal. Calcule: a) La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y el punto de caída del proyectil. b) La altura máxima del proyectil con respecto al suelo. c) La componente normal y tangencial de la aceleración al salir en el punto de disparo.*

Solución.

$$\begin{aligned} x &= 180(\cos\pi/6)t \\ y &= 150 + 180(\sin\pi/6)t - 5t^2 \end{aligned}$$

a) Punto de caída $150 + 180(\sin\pi/6)t - 5t^2 = 0$, $t = 19.5\,\mathrm{s}$

$$x = 180(\cos\pi/6)(19{,}5) = 3039.8\,\mathrm{m}$$

b) Tiempo para la altura máxima $180(\sin\pi/6) - 10t = 0$, $t = 9{,}0\,\mathrm{s}$ entonces $y_{\text{máx}} = 150 + 180(\sin\pi/6)(9) - 5(9)^2 = 555{,}0$

$$y_{\text{máx}} = 555{,}0\,\mathrm{m}$$

c) El vector unitario tangente es

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \frac{\vec{v}}{v} = \hat{\imath}\cos\pi/6 + \hat{\jmath}\sin\pi/6, \\ \vec{a} &= -10\hat{\jmath} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} a_T &= \vec{a}\cdot\hat{T} = -10\sin\pi/6 = -5\,\mathrm{m\,s^{-2}} \\ a_N &= \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{100 - 25} = 8{,}66\,\mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned}$$

EJERCICIO 6.54 *Un cañón de artillería lanza proyectiles con una rapidez de* $300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*. El artillero debe darle a un blanco que se encuentra a* $8640\,\mathrm{m}$ *detrás de un cerro cuya altura es de* $1000\,\mathrm{m}$ *ubicado a* $1200\,\mathrm{m}$ *del cañón. Demuestre que es posible darle al blanco y determine el ángulo de elevación para cumplir el objetivo.*

Solución. Supondremos que damos en el blanco entonces

$$\begin{aligned} y &= x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \\ 0 &= 8649\tan\alpha - \frac{5(8649)^2}{(300)^2\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

que tiene dos raíces reales

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 53.03^o\\ \alpha_2 &= 36.97^o\end{aligned}$$

debemos verificar que el disparo pasa sobre el cerro, para ello evaluamos en ambos ángulos $y(1200)$

$$\begin{aligned}y_1(1200) &= 1373{,}0\,\mathrm{m}\\ y_2(1200) &= 777{,}95\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

siendo la altura del cerro excedida en el primer caso.

▲

EJERCICIO 6.55 *Se dispara un proyectil de modo que su alcance horizontal es igual al triple de la altura máxima. Encuentre el ángulo de lanzamiento.*

Solución. Sabemos que

$$\begin{aligned}x_{\text{máx}} &= \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\\ y_{\text{máx}} &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 3\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

entonces $2\cos\alpha = 3\sin\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{2}{3}, \implies \alpha = 33{,}69^o$$

▲

EJERCICIO 6.56 *Un lanza granadas tiene un alcance máximo de* 300 m*. Para dar en un blanco que se encuentra a una distancia de* 400 m *del lanza granada, determine: a) La altura mínima que debe subirse el lanza granada. b) La rapidez de lanzamiento. c) El ángulo de lanzamiento.*

Solución. La ecuación de la parábola de seguridad es

$$y = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Sabemos también que para $h = 0$ la distancia máxima alcanzable es

$$x(0) = \frac{v_0^2}{g} = 300$$

y para una altura h la distancia horizontal máxima será

$$x(h) = \sqrt{(v_0^2 + 2hg)}\frac{v_0}{g} = 400\,\mathrm{m}$$

de la primera

a)

$$v_0 = \sqrt{3000} = 54.77\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

y de $\sqrt{((54.77)^2 + 2h10)}\frac{54.77}{10} = 400$

b)

$$h = 116.701\,\mathrm{m}$$

c) El ángulo de lanzamiento cuando el blanco está sobre el límite de la parábola de seguridad está dado por $\tan\alpha = v_0^2/gx$ entonces

$$\alpha = 36{,}87^o$$

EJERCICIO 6.57 *Se dispara a un objeto que se encuentra sobre un plano inclinado en ángulo α. El disparo se hace desde un punto del plano inclinado con rapidez inicial v_0. Determine la máxima distancia sobre el plano inclinado alcanzable por el disparo y el ángulo de lanzamiento para lograrlo.*

Solución. Este problema es parecido a otro anterior. Denotaremos por α' el ángulo del disparo respecto a la horizontal. Tenemos la ecuación de la parábola de seguridad

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2},$$

y para llegar a puntos sobre la parábola de seguridad

$$\tan\alpha' = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Además debe ser
$$y = x \tan \alpha.$$
De la primera y la tercera
$$\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} = x \tan \alpha,$$
de donde
$$x = \left(-\tan \alpha + \sqrt{(\tan^2 \alpha + 1)}\right) \frac{v_0^2}{g},$$
luego la distancia sobre el plano será
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x^2 + y^2} = x\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = x \sec \alpha \\ &= \sec \alpha \left(-\tan \alpha + \sqrt{(\tan^2 \alpha + 1)}\right) \frac{v_0^2}{g}. \end{aligned}$$
El cálculo del ángulo:
$$\begin{aligned} \tan \alpha' &= \frac{v_0^2}{gx} = \frac{1}{-\tan \alpha + \sqrt{(\tan^2 \alpha + 1)}} \\ &= \tan \alpha + \sec \alpha. \end{aligned}$$

que prueba el resultado. Sin embargo hay un resultado más simple. En efecto de la identidad
$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$
resulta
$$\tan \frac{\alpha + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha + \sec \alpha,$$
luego
$$\tan \alpha' = \tan \frac{\alpha + \frac{\pi}{2}}{2},$$
de donde
$$\alpha' = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

▲

EJERCICIO 6.58 *Un atleta lanza la bala desde una altura h con rapidez inicial v_0. Determine el máximo alcance horizontal a nivel del suelo y el ángulo de disparo necesario para ese alcance.*

Solución. En la ecuación de la parábola de seguridad

$$y = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2},$$

hacemos $y = 0$ obteniendo

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0}{g}\sqrt{(v_0^2 + 2gh)},$$

y de

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx},$$

se obtiene

$$\tan\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{(v_0^2 + 2gh)}},$$

menor de 45^o.

EJERCICIO 6.59 *Un cazador que no sabe que los proyectiles caen, dispara directamente a un mono que está sobre un árbol. El mono que tampoco sabe física, se deja caer justo cuando el cazador dispara. Pruebe que el disparo llega justo al mono.*

Solución. Sea h la altura inicial del mono, d su distancia horizontal al cazador. Entonces el ángulo de disparo está dado por

$$\tan\alpha = \frac{h}{d}.$$

Las ecuaciones de movimiento del proyectil (P) y mono (M) son

$$\begin{aligned} x_P &= v_0 t\cos\alpha,\ x_M = d, \\ y_P &= v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,\ y_M = h - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

de modo que cuando $x_P = x_M$ resulta

$$v_0 t\cos\alpha = d \Longrightarrow t = \frac{d}{v_0\cos\alpha},$$

para ese tiempo comparemos las alturas

$$\begin{aligned} y_P &= v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = d\tan\alpha - \frac{1}{2}gt^2, \\ y_M &= h - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

que son iguales porque $d\tan\alpha = h$.

Ejercicio 6.60 *En una feria de diversiones, se dispara al blanco sobre una hilera de blancos que pasan frente al que dispara, a una distancia d con una rapidez u_0. Los disparos salen con una rapidez v_0. Determine el ángulo en adelanto en que hay que apuntar para dar en el blanco al objeto que pasa justo frente al que dispara.*

Solución. Sea β ese ángulo. Debe cumplirse que

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{u_0 t}{d}, \\ v_0 t &= \sqrt{d^2 + u_0^2 t^2}, \end{aligned}$$

despeje el tiempo de la segunda y obtenga

$$\tan\alpha = \frac{u_0}{\sqrt{v_0^2 - u_0^2}}.$$

Ejercicio 6.61 *Una piedra se deja caer a un pozo de profundidad desconocida. El ruido del impacto en el fondo se escucha un tiempo T después de soltada la piedra. Si la rapidez del sonido es u_S determine en términos de T, u_s y g, la profundidad del pozo.*

Solución. Sea t_1 el tiempo de caída de la piedra y t_2 el tiempo que demora el sonido en llegar. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}gt_1^2 &= h, \\ u_S t_2 &= h, \end{aligned}$$

luego

$$T = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{u_S},$$

y despeje h

$$h = \frac{u_S^2}{2g}\left(\sqrt{1 + \frac{2gT}{u_S}} - 1\right)^2.$$

EJERCICIO 6.62 *Una pelota se deja caer desde una altura h y en cada rebote contra el suelo, la rapidez del rebote es un factor "e" de la rapidez que tenía justo antes de chocar contra el suelo ($e < 1$). Determine el tiempo que demora la pelota en quedar en reposo y la distancia total recorrida por la pelota.*

Solución. Sea h una de las alturas. El tiempo en llegar al suelo es

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

llega con velocidad

$$v = -gt = -\sqrt{2gh},$$

luego rebota con velocidad

$$v' = e\sqrt{2gh},$$

y sube hasta una nueva altura dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv'^2 &= mgh' \\ h' &= \frac{v'^2}{2g} = e^2 h. \end{aligned}$$

Luego la secuencia de alturas alcanzadas es h, e^2h, $e^4h, \cdots$ y los tiempos viajados (una vez la primera altura, dos veces las siguientes) dan un total de

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\left(\sqrt{\frac{2e^2h}{g}} + \sqrt{\frac{2e^4h}{g}} + \cdots\right) \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}}(1 + 2e + 2e^2 + e^3 + \cdots) = \sqrt{\frac{2h}{g}}(\frac{1+e}{1-e}), \end{aligned}$$

y la distancia total recorrida es

$$s = h + 2(e^2h + e^4h + e^6h + \cdots) = h\frac{1+e^2}{1-e^2}$$

▲

EJERCICIO 6.63 *Una persona lanza un objeto con rapidez inicial v_0 formando un ángulo α respecto a la horizontal. Determine la aceleración constante con que debe correr la persona, partiendo del reposo, para justo alcanzar el objeto al mismo nivel de lanzamiento.*

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\alpha \\ y &= v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

en $y = 0$, $t = 2v_0 \sin\alpha/g$, y debe tenerse

$$v_0 t \cos\alpha = \frac{1}{2}at^2,$$

o bien

$$a = g\cot\alpha.$$

▲

EJERCICIO 6.64 *Un automóvil viaja hacia el norte con una rapidez de $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ en una carretera recta. Un camión viaja en dirección opuesta con una rapidez de $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. (a)¿ Cuál es la velocidad del automóvil respecto al camión? (b)¿ Cuál es la velocidad del camión respecto al automóvil?*

Solución. Si el norte corresponde al sentido positivo, entonces
a) $60 - (-50) = 110\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ b)$-50 - 60 = -110\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

▲

EJERCICIO 6.65 *Un automovilista viaja hacia el oeste sobre la Ruta Inter estatal a $80\ \mathrm{km\,h^{-1}}$y es seguido por un auto patrulla que viaja a $95\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. (a)¿ Cuál es la velocidad del automovilista respecto al auto patrulla? (b)¿ Cuál es la velocidad del auto patrulla respecto al automovilista?*

Solución. Similarmente si el Oeste indica el sentido positivo entonces a)$80 - 95 = -15\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ b) $95 - 80 = 15\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

▲

Ejercicio 6.66 *Un río tiene una rapidez uniforme de $0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de $1\,\mathrm{km}$ y regresa al punto de partida. Si el estudiante puede nadar con una rapidez de $1{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ en aguas tranquilas, ¿cuánto dura el recorrido? Compare este resultado con el tiempo que duraría el recorrido si el agua estuviera tranquila.*

Solución. La rapidez absoluta (respecto a la ribera) cuando nada corriente arriba es $1{,}2 - 0{,}5 = 0.7$ y cuando nada corriente abajo es $1{,}2 + 0{,}5 = 1.7$ entonces el tiempo de ida y vuelta será

$$t = \frac{1000}{0{,}7} + \frac{1000}{1{,}7} = 2016.81\,\mathrm{s} = 0{,}56\,\mathrm{h}$$

▲

Ejercicio 6.67 *Dos remeros en idénticas canoas ejercen el mismo esfuerzo remando en un río, uno corriente arriba (y se mueve corriente arriba), mientras que el otro rema directamente corriente abajo. Un observador, en reposo sobre la orilla del río, determina sus rapideces que resultan ser de V_1 y V_2 respectivamente. Determine en términos de los datos la rapidez de las aguas del río.*

Solución. Sea W la rapidez del río y u la rapidez de los botes respecto al agua, (igual en ambos), entonces

$$V_1 = u - W,\ V_2 = u + W$$

de modo que

$$W = \frac{V_2 - V_1}{2}.$$

▲

Ejercicio 6.68 *Un bote cruza un río que mide de ancho D y cuya corriente fluye con una rapidez uniforme de u. El botero mantiene una orientación (es decir, la dirección en la cual apunta el bote) perpendicular al río y al motor fijo para dar una rapidez constante de v $\mathrm{m\,s^{-1}}$ con respecto al agua. De* *acuerdo a los datos ¿Cuál es la velocidad del bote respecto a un observador detenido en la orilla? ¿ Hasta dónde estará el bote, medido corriente abajo paralelamente al río, desde la posición inicial hasta cuando alcance la orilla opuesta?*

Solución. Sea x paralelo al río e y perpendicular al río de ancho w. Entonces sea v la velocidad del bote respecto al río, u la velocidad del río, V la velocidad absoluta del bote (respecto a tierra). Luego

a)

$$\vec{V} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath}$$

b) La componente de la velocidad absoluta perpendicular al río determine el tiempo de cruce de acuerdo a

$$t = \frac{w}{v}$$

por lo tanto el bote avanza paralelamente al río una distancia

$$d = ut = \frac{u}{v}w$$

Ejercicio 6.69 *Un comprador que está en una tienda puede caminar sobre una escalera mecánica en* 30 s *cuando está detenida. Cuando la escalera mecánica funciona normalmente, puede llevar al comprador sin caminar al siguiente piso en* 20 s*. ¿Cuánto tiempo le tomaría al comprador al subir caminando con la escalera mecánica en movimiento? Suponga que el comprador hace el mismo esfuerzo al caminar sobre la escalera mecánica en movimiento o cuando está parada.*

Solución. Sea L el largo de la escalera. Entonces la velocidad de la persona respecto a la escalera es

$$v' = \frac{L}{30}.$$

Sea v_e la velocidad de la escalera. Ella corresponde a la de la persona cuando no camina, es decir

$$v_e = \frac{L}{20}$$

Si la escalera funciona y la persona camina, entonces

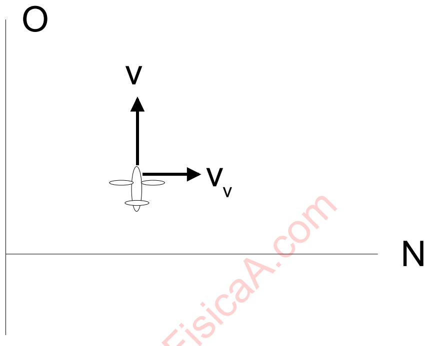
$$v = v_e + v' = \frac{L}{20} + \frac{L}{30} = \frac{L}{t}$$

de donde el tiempo será

$$t = 12\,\mathrm{s}$$

EJERCICIO 6.70 *Un avión va dirigiéndose hacia el oeste. La rapidez del avión respecto al aire es de* $150\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. *Si existe un viento de* $30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *hacia el norte, calcule la velocidad del avión respecto a la Tierra.*

Solución.



La velocidad del viento es $v_v = 30$ y la rapidez del avión respecto al aire es $v' = 150$, en magnitudes. Pero

$$\vec{v} = v\hat{\jmath} = 30\hat{\imath} + \vec{v}'$$

de donde

$$\vec{v}' = v\hat{\jmath} - 30\hat{\imath}$$

y si tomamos magnitudes

$$150 = \sqrt{v^2 + 30^2}$$

de donde

$$v = 146.969\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

EJERCICIO 6.71 *El piloto de un avión desea volar hacia el oeste en presencia de un viento que sopla hacia el sur a* $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. *Si la rapidez del avión cuando no sopla el viento es de* $200\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, *a) ¿ en qué dirección debe dirigirse el avión? b) ¿ cuál debe ser su rapidez respecto a la Tierra?*

Solución. Usaremos la figura anterior pero ahora la velocidad del viento está hacia el Sur. Ahora la velocidad del viento es $v_v = 50$ y la rapidez del avión respecto al aire es $v' = 200$, en magnitudes. Pero

$$\vec{v} = v\hat{\jmath} = -50\hat{\imath} + \vec{v}'$$

y similarmente resulta

$$v' = 200 = \sqrt{v^2 + 50^2}$$

de donde

b)

$$v = 193.65\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

a)

$$\vec{v}' = 50\hat{\imath} + 193.65\hat{\jmath}$$

da la dirección en que debe dirigirse el avión.

EJERCICIO 6.72 *Un automóvil viaja hacia el Este con una rapidez de* $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$*. Está lloviendo verticalmente con respecto a la Tierra. Las marcas de la lluvia sobre las ventanas laterales del automóvil forman un ángulo de* 60^o *con la vertical, calcule la velocidad de la lluvia con respecto al automóvil y con respecto a la Tierra.*

Solución. La velocidad relativa $\vec{v}'$ de la lluvia forma un ángulo de 60^o con la vertical y la velocidad $\vec{v}$ de la lluvia con respecto a la Tierra es vertical. Entonces de

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{v}',$$

tenemos que

$$\begin{aligned} v_A - v'\sin 60 &= 0, \\ v'\cos 60 &= v, \end{aligned}$$

de donde la velocidad de la lluvia respecto al auto tiene magnitud

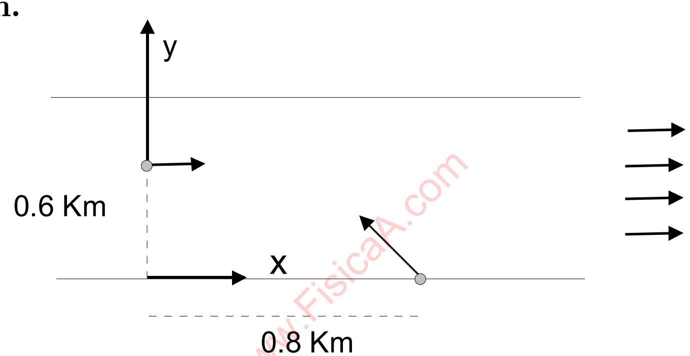
$$v' = \frac{v_A}{\sin 60} = \frac{50}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{100}{\sqrt{3}}\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

y la velocidad de la lluvia respecto a la tierra tiene magnitud

$$v = v'\cos 60 = \frac{50}{\sqrt{3}}\,\mathrm{km\,h^{-1}}.$$

EJERCICIO 6.73 *Un niño en peligro de ahogarse en un río está siendo llevado corriente abajo por una corriente que fluye uniformemente con una rapidez de* $2{,}5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. *El niño está a* $0{,}6\,\mathrm{km}$ *de la orilla y a* $0{,}8\,\mathrm{km}$ *corriente arriba de un embarcadero cuando un bote de rescate se pone en camino. a)Si el bote procede a su rapidez máxima de* $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *con respecto al agua, ¿cuál es la dirección, relativa a la orilla, que deberá tomar el conductor del bote? b)¿ Cuál es el ángulo que hace la velocidad* v *del bote con respecto a la orilla? c)¿ Cuánto tiempo le tomará al bote para alcanzar al niño?*

Solución.



Para el niño

$$
\begin{aligned}
x &= 2{,}5t \\
y &= 0{,}6
\end{aligned}
$$

para el bote

$$
\begin{aligned}
x &= 0{,}8 + v_x t \\
y &= v_y t
\end{aligned}
$$

el bote encuentra al niño cuando

$$
\begin{aligned}
2{,}5t &= 0{,}8 + v_x t \\
0{,}6 &= v_y t
\end{aligned}
$$

pero la velocidad absoluta está dada por

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= 2{,}5\hat{\imath} + \vec{v}' \\
(v_x - 2{,}5)\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} &= \vec{v}'
\end{aligned}
$$

siendo $v' = 20$ de modo que si tomamos módulo de $\vec{v}'$ resultará

$$(v_x - 2{,}5)^2 + v_y^2 = 400$$

si reemplazamos aquí $v_x - 2{,}5 = -\frac{0{,}8}{t}$ y $v_y = \frac{0{,}6}{t}$ resultará

$$(\frac{0{,}8}{t})^2 + (\frac{0{,}6}{t})^2 = 400$$

de donde

c)

$$t = 0{,}0\,5\,\mathrm{h}$$

b) Ahora podemos calcular v_x, v_y

$$\begin{aligned} v_x &= 2{,}5 - \frac{0{,}8}{t} = 2{,}5 - \frac{0{,}8}{0{,}05} = -13{,}5, \\ v_y &= \frac{0{,}6}{0{,}05} = 12. \end{aligned}$$

O sea, como se supuso en la figura, el bote va corriente arriba formando un ángulo con la orilla determinado de

$$\tan\theta = \frac{12}{13{,}5}, \Longrightarrow \theta = 41{,}63^o.$$

a) El conductor del bote debe dirigirlo según

$$\vec{v}' = (v_x - 2{,}5)\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = -16\hat{\imath} + 12\hat{\jmath},$$

o sea formando un ángulo θ' respecto a la orilla aguas arriba dado por

$$\tan\theta' = \frac{12}{16} \Longrightarrow \theta' = 36{,}87^o.$$

▲

EJERCICIO 6.74 *Desde el techo del carro de un tren que está acelerando hacia el norte a una razón de* $2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ *se suelta y cae un perno. ¿ Cuál es la aceleración del perno con respecto a: (a) el carro del tren? (b) la estación de tren estacionaria?*

Solución. Si y es la vertical hacia arriba y x es la dirección de la aceleración del tren, entonces

a)

$$\vec{a}' = -2{,}5\hat{\imath} - 9{,}8\hat{\jmath}.$$

b)

$$\vec{a} = -9{,}8\hat{\jmath}.$$

▲

Ejercicio 6.75 *Un estudiante de la Facultad de Ingeniería está parado sobre el vagón de un tren que viaja a lo largo de una vía horizontal recta a una rapidez constante de $V\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. El estudiante lanza una pelota al aire a lo largo de una trayectoria que inicialmente forma un ángulo de α con la horizontal y está en línea con la vía. El profesor del estudiante, que está parado cerca sobre la tierra, observa que la pelota sale verticalmente. ¿Qué altura subirá la pelota?*

Solución. Si V' es la rapidez relativa al tren inicial de lanzamiento, entonces en la dirección del movimiento x tenemos

$$V_x = V'\cos\alpha - V = 0$$

porque el Profesor observa que sale verticalmente. Entonces

$$V' = \frac{V}{\cos\alpha}$$

entonces

$$V_y = V'_y = V'\sin\alpha = V\tan\alpha$$

y como sabemos subirá una altura h dada por

$$h = \frac{V^2\tan^2\alpha}{2g}$$

▲