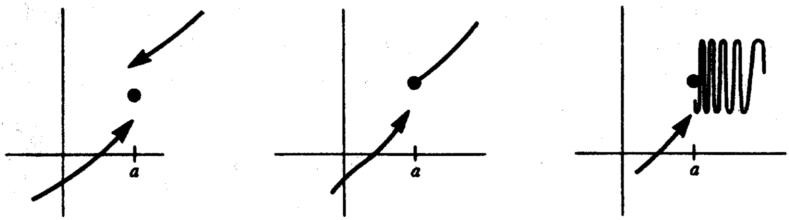

(a) (b) (c)

FIGURA 2

estas peculiaridades. El calificativo adoptado ha sido «continua». Intuitivamente, una función f es continua si su gráfica no contiene interrupciones, ni saltos ni oscilaciones indefinidas. Aunque esta descripción es, por lo general, suficiente para

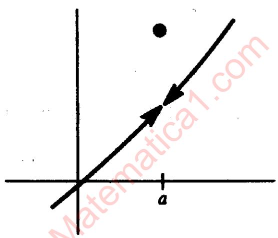

FIGURA 3

www.Matematica1.com

decidir si una función es continua observando simplemente su gráfica (habilidad que merece ser cultivada), es fácil engañarse, y la definición rigurosa es *muy* importante.

DEFINICIÓN

La función f es **continua en a** si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

No tendremos dificultad alguna en hallar muchos ejemplos de funciones que son, o no son, continuas en algún número a; todo ejemplo referente a límites suministra un ejemplo referente a continuidad, y el capítulo 5 suministra ciertamente bastantes de éstos.

La función $f(x) = \text{sen } 1/x$ no es continua en 0, porque ni siquiera está definida en 0, y lo mismo vale para la función $g(x) = x \text{ sen } 1/x$. Por otra parte, si queremos extender la segunda de estas funciones, es decir, si queremos definir una nueva función G poniendo

$$G(x) = \begin{cases} x \text{ sen } 1/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

entonces la elección de $a = G(0)$ puede hacerse de tal manera que G sea continua en 0; para hacer esto podemos (de hecho, debemos) definir $G(0) = 0$ (figura 4). Esta clase de extensión no es posible para f; si definimos

$$F(x) = \begin{cases} \text{sen } 1/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

entonces F no será continua en 0, cualquiera que sea a, porque $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

La función

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

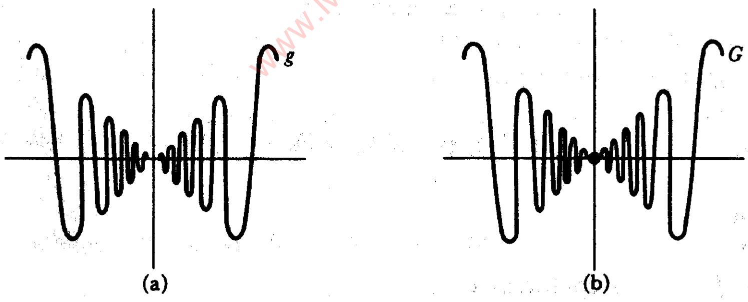

FIGURA 4

no es continua en a, si $a \neq 0$, puesto que $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe. Sin embargo, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, de modo que f es continua precisamente en un solo punto, el 0.

Las funciones $f(x) = c$, $g(x) = x$ y $h(x) = x^2$ son continuas en todos los números a, puesto que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c = f(a),$$

www.Matematica1.com

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} x = a = g(a),$$
$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} x^2 = a^2 = h(a).$$

Considérese finalmente la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

En el capítulo 5 hicimos ver que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ para todo a. Puesto que $0 = f(a)$ solamente cuando a es irracional, esta función es continua en a si a es irracional, pero no si a es racional.

Será más fácil todavía dar ejemplos de continuidad si demostramos dos sencillos teoremas.

TEOREMA 1

Si f y g son continuas en a, entonces

(1) $f + g$ es continua en a,
(2) $f \cdot g$ es continua en a.

Además, si $g(a) \neq 0$, entonces

(3) $1/g$ es continua en a.

DEMOSTRACIÓN

Puesto que f y g son continuas en a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Por el teorema 2(1) del capítulo 5 esto implica que

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

lo cual es precisamente la afirmación de que $f + g$ es continua en a. Las demostraciones de las partes (2) y (3) se dejan para el lector. ▮

www.Matematica1.com

Partiendo de las funciones $f(x) = c$ y $f(x) = x$, que son continuas en a, para todo a, podemos aplicar el teorema 1 para concluir que una función

$$f(x) = \frac{b_n x^m + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0}{c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_0}$$

es continua en todo punto de su dominio. Pero es difícil llegar a mucho más de esto. Cuando estudiemos en detalle la función seno será fácil demostrar que sen es continua en a para todo a; aceptemos de momento este hecho. Una función tal como

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x + x^2 + x^4 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^{27} x + 4x^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

puede demostrarse ahora que es continua en todo punto de su dominio. Pero todavía no podemos demostrar la continuidad de una función tal como $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$; necesitamos, evidentemente, un teorema referente a la composición de funciones continuas. Antes de formular este teorema, vale la pena destacar el siguiente punto acerca de la definición de continuidad. Si traducimos la ecuación $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ de acuerdo con la definición de límites, se obtiene

para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,
si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Pero en este caso, en que el límite es $f(a)$, la frase

$$0 < |x - a| < \delta$$

puede cambiarse por la condición más sencilla

$$|x - a| < \delta,$$

puesto que si $x = a$ se cumple ciertamente que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

TEOREMA 2

Si g es continua en a, y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a. [Obsérvese que se requiere que f sea continua en $g(a)$, no en a.]

www.Matematica1.com

DEMOSTRACIÓN

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta \text{ entonces } |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \varepsilon,$$
$$\text{es decir, } |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Tendremos que aplicar primero la continuidad de f para estimar cómo de cerca tiene que estar $g(x)$ de $g(a)$ para que se cumpla esta desigualdad. Puesto que f es continua en $g(a)$, existe un $\delta' > 0$ tal que para todo y,

(1) si $|y - g(a)| < \delta'$, entonces $|f(y) - f(g(a))| < \varepsilon$.

En particular, esto significa que

(2) Si $|g(x) - g(a)| < \delta'$, entonces $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$.

Aplicamos ahora la continuidad de g para estimar cómo de cerca tiene que estar x de a para que se cumpla la desigualdad $|g(x) - g(a)| < \delta'$. El número δ' es un número positivo como cualquier otro número positivo; podemos, por lo tanto, tomar δ' como el ε (!) de la definición de continuidad de g en a. Deducimos que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

www.Matematica1.com

(3) Si $|x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - g(a)| < \delta'$.

Combinando (2) y (3) vemos que para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon. \blacksquare$$

Podemos ahora volver a considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Hemos observado ya que f es continua en 0. Unas cuantas aplicaciones de los teoremas 1 y 2, junto con la continuidad de sen, demuestran que f es también continua en a, para $a \neq 0$. El lector debería ser capaz de analizar con la misma facilidad funciones tales como $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen}^2(x^3)))$.

Los pocos teoremas de este capítulo se refieren todos a continuidad de funciones en un punto, pero el concepto de continuidad no empieza a ser interesante hasta que dirigimos nuestra atención a funciones que son continuas en todos los puntos de algún intervalo. Si f es continua en x para todo x de (a, b), entonces se dice que f es **continua en** (a, b). La continuidad en un intervalo cerrado se define de modo algo diferente; una función f se dice que es **continua en** $[a, b]$ si

(1) f es continua en x para todo x de (a, b),

(2) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Las funciones que son continuas en un intervalo suelen considerarse especialmente como buenas; de hecho puede decirse que la continuidad es la primera condición que debe satisfacer una función «razonable». Se suele, a veces, describir intuitivamente una función continua como aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Al considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

se ve que esta descripción es un poco demasiado optimista, pero con todo es verdad que existen muchos resultados importantes acerca de funciones que son continuas en un intervalo. Estos teoremas son, por lo general, mucho más difíciles que los de este capítulo, pero existe un teorema sencillo que constituye un puente entre los dos tipos de resultados. La hipótesis de este teorema exige la continuidad en un punto solamente, pero la conclusión describe el comportamiento de la función en algún intervalo que contiene el punto. Aunque este teorema es, en realidad, un lema para posteriores argumentaciones, se incluye aquí como una visión anticipada de lo que ha de venir.

TEOREMA 3

Supóngase que f es continua en a, y $f(a) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$. Análogamente, si $f(a) < 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$.

www.Matematica1.com

DEMOSTRACIÓN

Considérese el caso $f(a) > 0$ puesto que f que es continua en a, si $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Puesto que $f(a) > 0$ podemos tomar a $f(a)$ como el ε. Así, pues, existe $\delta > 0$ tal que para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < f(a),$$

y esta última igualdad implica $f(x) > 0$.

Puede darse una demostración análoga en el caso $f(a) < 0$; tómese $\varepsilon = -f(a)$. O también se puede aplicar el primer caso a la función $-f$. ▮

www.Matematica1.com

PROBLEMAS

1. ¿Para cuáles de las siguientes funciones f existe una función F de dominio $\mathbf{R}$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f?

(i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

(ii) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

(iii) $f(x) = 0$, x irracional.
(iv) $f(x) = 1/q$, $x = p/q$ racional en fracción irreducible.

2. ¿En qué puntos son continuas las funciones de los problemas 4-17 y 4-19?

3. (a) Supóngase que f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo x. Demostrar que f es continua en 0. [Obsérvese que $f(0)$ debe ser igual a 0.]
(b) Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún $a \neq 0$.
(c) Supóngase que g es continua en 0, $g(0) = 0$, y $|f(x)| \leq |g(x)|$. Demostrar que f es continua en 0.

4. Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.

5. Para todo número a, hallar la función que sea continua en a, pero no lo sea en ningún otro punto.

6. (a) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, pero continua en todos los demás puntos.
(b) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, y en 0, pero que sea continua en todos los demás puntos.

7. Supóngase que f satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$, y que f es continua en 0. Demostrar que f es continua en a para todo a.

8. Supóngase que f es continua en a y $f(a) = 0$. Demostrar que si $\alpha \neq 0$, entonces $f + \alpha$ es distinta de 0 en algún intervalo abierto que contiene a.

9. (a) Supóngase que f *no* es continua en a. Demostrar que para algún $\varepsilon > 0$ existen números x tan próximos como se quiera de a con $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Ilústrese esto gráficamente.
(b) Dedúzcase que para algún $\varepsilon > 0$, *o bien* existen números x tan próximos como se quiera de a con $f(x) < f(a) - \varepsilon$ o bien existen números x tan próximos como se quiera de a con $f(x) > f(a) + \varepsilon$.

10. (a) Demostrar que si f es continua en a, entonces también lo es $|f|$.
(b) Demostrar que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = E + O$, donde E es par y continua y O es impar y continua.
(c) Demostrar que si f y g son continuas, también lo son $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$.
(d) Demostrar que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = g - h$, donde g y h son no negativas y continuas.

11. Demostrar el teorema 1(3) aplicando el teorema 2 y la continuidad de la función $f(x) = 1/x$.

***12.** (a) Demostrar que si f es continua en l y $\lim_{x \to a} g(x) = l$, entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(l)$. [Se puede hacer partiendo de las definiciones, pero es más fácil considerar la función G con $G(x) = g(x)$ para $x \neq a$, y $G(a) = l$.]
(b) Demostrar que si no se supone la continuidad de f en l, entonces no se cumple, por lo general, que $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$. Indicación: Hacer la prueba con $f(x) = 0$ para $x \neq l$, y $f(l) = 1$.

13. (a) Demostrar que si f es continua en $[a, b]$, entonces existe una función g que es continua en $\mathbf{R}$, y que satisface $g(x) = f(x)$ para todo x en $[a, b]$. Indicación: Puesto que hay evidentemente un gran margen para elegir, hágase la prueba con g constante en $(-\infty, a]$ y $[b, \infty)$.
(b) Hágase ver con un ejemplo que esta afirmación es falsa si se sustituye $[a, b]$ por (a, b).

14. (a) Supóngase que g y h son continuas en a, y que $g(a) = h(a)$. Defínase $f(x)$ como $g(x)$ si $x \geq a$ y $h(x)$ si $x \leq a$. Demostrar que f es continua en a.
(b) Supóngase que g es continua en $[a, b]$, h es continua en $[b, c]$ y $g(b) = h(b)$.

www.Matematica1.com

Sea $f(x)$ igual a $g(x)$ para x en $[a, b]$ e igual a $h(x)$ para x en $[b, c]$. Demostrar que f es continua en $[a, c]$. (Así, pues, las funciones continuas pueden «soldarse».)

15. (a) Demostrar la siguiente versión del teorema 3 para «continuidad por la derecha»: Supóngase que $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, y $f(a) > 0$. Existe entonces un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $0 \leq x - a < \delta$. Análogamente, si $f(a) < 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $0 \leq x - a < \delta$.

(b) Demostrar una versión del teorema 3 cuando $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

16. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, pero es $\neq f(a)$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad evitable** en a.

(a) Si $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$, ¿tiene f una discontinuidad evitable en 0? ¿Y si $f(x) = x \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$?

(b) Supóngase que f tiene una discontinuidad evitable en a. Sea $g(x) = f(x)$ para $x \neq a$ y sea $g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. Demostrar que g es continua en a. (No tomarse demasiado trabajo; esto es muy fácil.)

(c) Sea $f(x) = 0$ si x es racional, y sea $f(p/q) = 1/q$ si p/q es una fracción irreducible. ¿Qué función es la g definida por $g(x) = \lim_{y \to x} f(y)$?

*(d) Sea f una función con la propiedad de que todo punto de discontinuidad es una discontinuidad evitable. Esto significa que $\lim_{y \to x} f(y)$ existe para todo x, pero que f puede ser discontinua en algunos (incluso en infinitos) números x. Defínase $g(x) = \lim_{y \to x} f(y)$. Demostrar que g es continua. [Esto no es tan fácil como la parte (b).]

**(e) ¿Existe alguna función f que sea discontinua en todo punto y que tenga solamente discontinuidades evitables? (Vale la pena considerar este problema ahora, pero principalmente como una prueba de intuición; aunque sospeche la solución correcta, el lector no podrá ciertamente demostrarla por ahora. Véase el problema 21-33.)

www.Matematica1.com