TEOREMA 2

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo x en $[a, b]$.
(Geométricamente, este teorema significa que la gráfica de f queda por debajo de alguna línea paralela al eje horizontal como en la figura 2.)

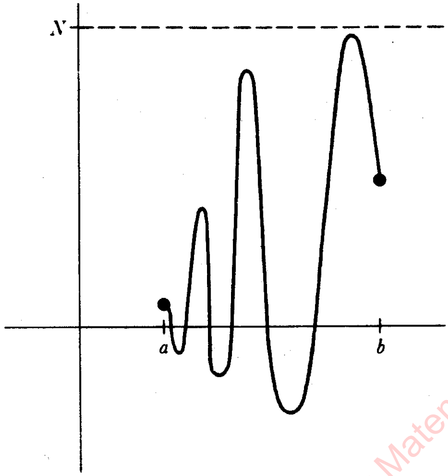

FIGURA 2

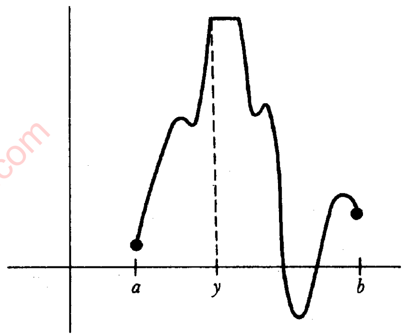

FIGURA 3

TEOREMA 3

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe algún número y en $[a, b]$ tal que $f(y) > f(x)$ para todo x en $[a, b]$ (figura 3).

Estos tres teoremas difieren notablemente de los teoremas del capítulo 6. Las hipótesis de aquellos teoremas postulaban siempre continuidad en un solo punto mientras que las hipótesis de los teoremas presentes exigen continuidad en todo un intervalo $[a, b]$; si la continuidad deja de cumplirse en un solo punto, las conclusiones pueden no ser ciertas. Por ejemplo, sea f la función de la figura 4,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Entonces f es continua en todo punto de $[0, 2]$ excepto en $\sqrt{2}$, y $f(0) < 0 < f(2)$, pero no existe ningún punto x en $[0, 2]$ tal que $f(x) = 0$; la discontinuidad

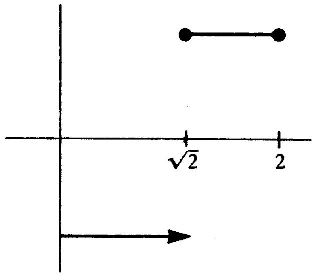

FIGURA 4

en el punto $\sqrt{2}$ es suficiente para destruir la conclusión del teorema 1.

Análogamente, supongamos que f es la función de la figura 5,

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

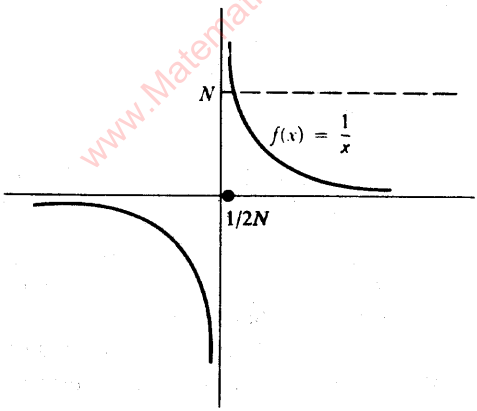

FIGURA 5

Entonces f es continua en todo punto de $[0, 1]$ excepto en 0, pero f no está acotada superiormente en $[0, 1]$. En efecto, para cualquier número $N > 0$, se tiene $f(\frac{1}{2}N) = 2N > N$.

Este ejemplo hace ver también que el intervalo cerrado $[a, b]$ del teorema 2 no puede ser sustituido por el intervalo abierto (a, b), ya que la función f es continua en $(0, 1)$, pero no está acotada en este intervalo.

Finalmente, consideremos la función de la figura 6,

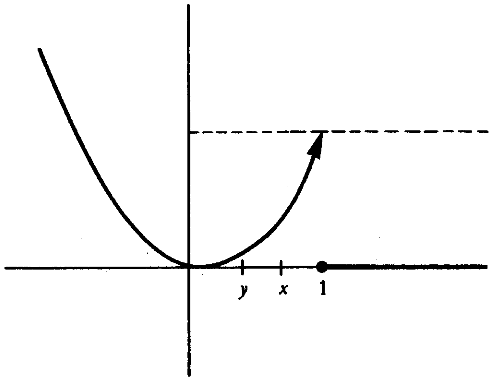

FIGURA 6

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

En el intervalo $[0, 1]$ la función f está acotada superiormente, de modo que f satisface la conclusión del teorema 2, aunque f no sea continua en $[0, 1]$. Pero f no satisface la conclusión del teorema 3; no existe ningún y en $[0, 1]$ tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo x de $[0, 1]$; en efecto, no se cumple ciertamente que $f(1) \geq f(x)$ para todo x de $[0, 1]$, de modo que no podemos elegir $y = 1$, ni tampoco podemos elegir $0 \leq y < 1$ porque $f(y) < f(x)$ si x es un número cualquiera tal que $y < x < 1$.

Este ejemplo hace ver que el teorema 3 es considerablemente más fuerte que el teorema 2. El teorema 3 se parafrasea a menudo diciendo que una función continua en un intervalo cerrado «alcanza su valor máximo» en dicho intervalo.

Las hipótesis de nuestros tres teoremas son muy restrictivas, pero en compensación obtenemos unas conclusiones de naturaleza completamente distinta de las de los teoremas anteriores. Describen el comportamiento de una función no precisamente en un punto sino en todo un intervalo; tales propiedades «globales» de una función son siempre notablemente más difíciles de demostrar que las propiedades «locales», y en correspondencia con esto son de mucha mayor fuerza. Para ilustrar la utilidad de los teoremas 1, 2 y 3, deduciremos pronto algunas consecuencias importantes, pero será conveniente mencionar primero algunas generalizaciones simples de estos teoremas.

TEOREMA 4

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = c$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $g = f - c$. Entonces g es continua, y $g(a) < 0 < g(b)$. Según el teorema 1, existe algún x en $[a, b]$ tal que $g(x) = 0$. Pero esto significa que $f(x) = c$. ▮

TEOREMA 5

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) > c > f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = c$.

DEMOSTRACIÓN

La función $-f$ es continua en $[a, b]$ y $-f(a) < -c < -f(b)$. Según el teorema 4 existe algún x en $[a, b]$ tal que $-f(x) = -c$, lo cual significa que $f(x) = c$. ▮

Los teoremas 4 y 5 juntos demuestran que f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Todavía podemos decir más: Si c y d están en $[a, b]$, entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(c)$ y $f(d)$. La demostración es sencilla; si, por ejemplo, $c < d$, entonces basta aplicar los teoremas 4 y 5 al intervalo $[c, d]$. Resumiendo, si una función continua en un intervalo toma dos valores, entonces toma todos los valores comprendidos entre ellos; esta ligera generalización del teorema 1 recibe a menudo el nombre de teorema de los valores intermedios.

TEOREMA 6

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada inferiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \geq N$ para todo x de $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN

La función $-f$ es continua en $[a, b]$, de modo que según el teorema 2, existe un número M tal que $-f(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$. Pero esto significa que $f(x) \geq -M$ para todo x de $[a, b]$, de modo que podemos poner $N = -M$. ▮

Los teoremas 2 y 6 juntos demuestran que una función continua f en $[a, b]$ está acotada en $[a, b]$, es decir, existe un número N tal que $|f(x)| \leq N$ para todo x de $[a, b]$. En efecto, puesto que el teorema 2 asegura la existencia de un número N_1 tal que $f(x) \leq N_1$ para todo x de $[a, b]$ y el teorema 6 asegura la existencia de un número N_2 tal que $f(x) \geq N_2$ para todo x de $[a, b]$, podemos tomar $N = \max(|N_1|, |N_2|)$.

TEOREMA 7

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe algún y en $[a, b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x de $[a, b]$.
(Una función continua en un intervalo cerrado alcanza su mínimo en dicho intervalo.)

DEMOSTRACIÓN

La función $-f$ es continua en $[a, b]$; según el teorema 3 existe algún y en $[a, b]$ tal que $-f(y) \geq -f(x)$ para todo x de $[a, b]$, lo cual significa que $-f(y) \leq -f(x)$ para todo x de $[a, b]$. ▮

Una vez deducidas las consecuencias triviales de los teoremas 1, 2 y 3, empezaremos a demostrar algunas cosas interesantes.

TEOREMA 8

Todo número positivo posee una raíz cuadrada. En otras palabras, si $\alpha > 0$, entonces existe algún número x tal que $x^2 = \alpha$.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos la función $f(x) = x^2$, la cual es ciertamente continua. Obsérvese que la afirmación del teorema puede ser expresada en términos de f: «el número α posee una raíz cuadrada» significa que f toma el valor α. La demostración de este hecho acerca de f será una consecuencia fácil del teorema 4.

Existe, evidentemente, un número $b > 0$ tal que $f(b) > \alpha$ (como se ve en la figura 7); en efecto, si $\alpha > 1$ podemos tomar $b = \alpha$, mientras que si $\alpha < 1$ podemos tomar $b = 1$. Puesto que $f(0) < \alpha < f(b)$, el teorema 4 aplicado a $[0, b]$ implica que para algún x (de $[0, b]$), tenemos $f(x) = \alpha$, es decir, $x^2 = \alpha$. ▮

Precisamente el mismo raciocinio puede aplicarse para demostrar que todo

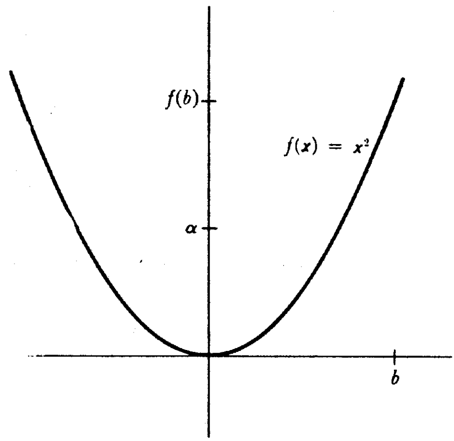

FIGURA 7

número positivo tiene una raíz n-ésima, cualquiera que sea el número n. Si n es impar, se puede decir más: *todo* número tiene una raíz n-ésima. Para demostrarlo basta observar que si el número positivo α tiene la raíz n-ésima x, es decir, si $x^n = \alpha$, entonces $(-x)^n = -\alpha$ (puesto que n es impar), de modo que $-\alpha$ tiene la raíz n-ésima $-\alpha$. Afirmar que, para un n impar, cualquier número α tiene una raíz n-ésima, equivale a afirmar que la ecuación

$$x^n - \alpha = 0$$

tiene una raíz si n es impar. El resultado expresado de este modo es susceptible de gran generalización.

TEOREMA 9

Si n es impar, entonces cualquier ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

posee una raíz.

DEMOSTRACIÓN

Tendremos que considerar, evidentemente, la función

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0;$$

habría que demostrar que f es unas veces positiva y otras negativa. La idea intuitiva es que para un $|x|$ grande, la función se parece mucho a $g(x) = x^n$ y, puesto que n es impar, esta función es positiva para x grandes positivos y negativa para x grandes negativos. Un poco de cálculo algebraico es todo lo que hace falta para dar forma a esta idea intuitiva.

Para análizar debidamente la función f conviene escribir

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right).$$

Obsérvese que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|x^n|}.$$

En consecuencia, si elegimos un x que satisfaga

$$(*) \quad |x| > 1,\ 2n|a_{n-1}|,\ \ldots,\ 2n|a_0|,$$

entonces $|x^k| > |x|$ y

$$\frac{|a_{n-k}|}{|x^k|} < \frac{|a_{n-k}|}{|x|} < \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|} = \frac{1}{2n},$$

de modo que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ términos}} = \frac{1}{2}.$$

Expresado de otro modo,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \leq \frac{1}{2},$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Por lo tanto, si elegimos un $x_1 > 0$ que satisfaga (*), entonces

$$\frac{x_1{}^n}{2} \leq x_1{}^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x_1),$$

de modo que $f(x_1) > 0$. Por otra parte, si $x_2 < 0$ satisface (*), entonces $x_2{}^n < 0$ y

$$\frac{x_2{}^n}{2} \geq x_2{}^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \cdots + \frac{a_0}{x_2{}^n}\right) = f(x_2),$$

de modo que $f(x_2) < 0$.

Aplicando ahora el teorema 1 al intervalo $[x_2, x_1]$ llegamos a la conclusión de que existe un x en $[x_1, x_2]$ tal que $f(x) = 0$. ▮

El teorema 9 resuelve tan felizmente el problema de las ecuaciones de grado impar que parece obligado intentar lo mismo respecto a las de grado par, no estudiadas hasta ahora. Sin embargo, el problema parece a primera vista insuperable. Unas ecuaciones tales como $x^2 - 1 = 0$ tienen una solución, mientras que otras tales como $x^2 + 1 = 0$ no la tienen; ¿qué más hay que decir? *Se puede* decir, con todo, algo de interés, considerando una cuestión más general. En vez de intentar resolver la ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

preguntémonos acerca de la posibilidad de resolver las ecuaciones

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = c$$

para todos los números posibles c. Esto equivale a hacer variar el término constante a_0. La información que se puede dar acerca de la solución de estas ecuaciones depende de un hecho que se ilustra en la figura 8.

La gráfica de la función $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, con n par, contiene, por lo menos en la forma en que la hemos dibujado, un punto más bajo que todos los demás. Dicho de otro modo existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todos los números x, es decir, la función f posee un mínimo, no solamente en todo intervalo cerrado, sino en la recta completa. (Obsérvese que esto no se cumple si n es

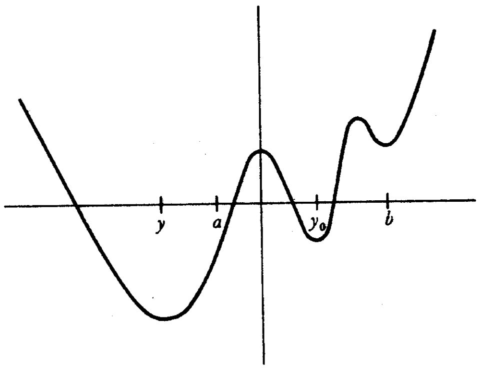

FIGURA 8

impar.) La demostración depende del teorema 7, pero hace falta una aplicación artificiosa del mismo. Podemos aplicar el teorema 7 a cualquier intervalo $[a, b]$, y obtener así un punto y_0 tal que $f(y_0)$ es el valor mínimo de f en $[a, b]$; pero si ocurre que $[a, b]$ es, por ejemplo, el intervalo de la figura 8, entonces el punto y_0 no será aquel en que f alcanza su valor mínimo para toda la recta. Toda la demostración del siguiente teorema se basa en la elección de $[a, b]$ de modo que esto no pueda ocurrir.

TEOREMA 10

Si n es par y $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, entonces existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x.

DEMOSTRACIÓN

Lo mismo que en el teorema 9, si

$$M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|),$$

entonces para todo x con $|x| \geq M$, tenemos

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Al ser n par, $x^n \geq 0$ para todo x, de modo que

$$\frac{x^n}{2} \le x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x),$$

siempre que $|x| \geq M$. Consideremos ahora el número $f(0)$. Sea $b > 0$ un número tal que $b^n \geq 2f(0)$ y también $b > M$. Entonces si $x \geq b$, tenemos (figura 9)

$$f(x) \ge \frac{x^n}{2} \ge \frac{b^n}{2} \ge f(0).$$

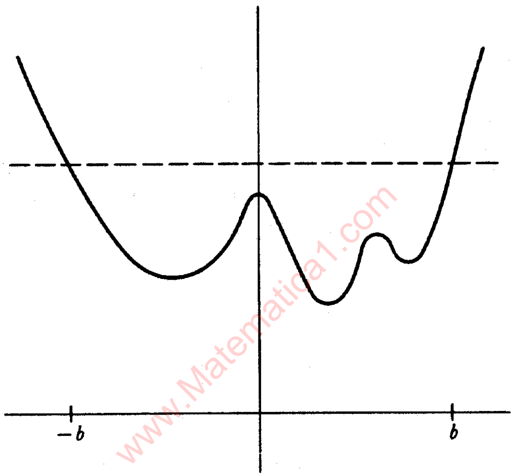

FIGURA 9

Análogamente, si $x \leq -b$, entonces

$$f(x) \ge \frac{x^n}{2} \ge \frac{(-b)^n}{2} = \frac{b^n}{2} \ge f(0).$$

Resumiendo:

si $x \geq b$ o $x \leq -b$, entonces $f(x) \geq f(0)$.

Apliquemos ahora el teorema 7 a la función f en el intervalo $[-b, b]$. Se deduce que existe un número y tal que

(1) si $-b \leq x \leq b$, entonces $f(y) \leq f(x)$.

En particular, $f(y) \leq f(0)$. De este modo

$$(2) \quad \text{si } x \leq -b \text{ o } x \geq b, \text{ entonces } f(x) \geq f(0) \geq f(y).$$

Combinando (1) y (2) vemos que $f(y) \leq f(x)$ para todo x. ▮

El teorema 10 permite ahora demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 11

Consideremos la ecuación

$$(*) \quad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = c,$$

y supongamos que n es par. Entonces existe un número m tal que (*) posee una solución para $c \geq m$ y no posee ninguna para $c < m$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ (figura 10).

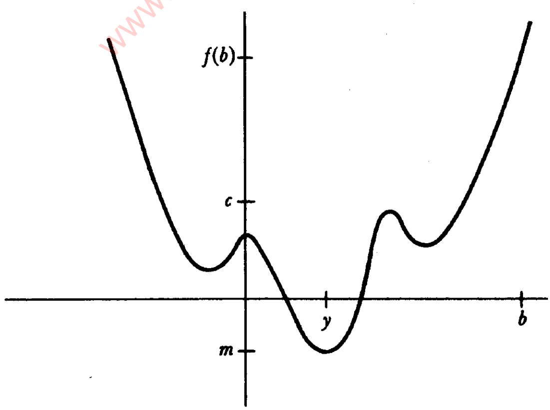

FIGURA 10

Según el teorema 10, existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x. Sea $m = f(y)$. Si $c < m$, entonces la ecuación (*) no tiene, evidentemente, ninguna solución, puesto que el primer miembro tiene un valor $\geq m$. Si $c = m$, entonces (*)

tiene y como solución. Finalmente, supongamos $c > m$. Sea b un número tal que $b > y$ y $f(b) > c$. Entonces $f(y) = m < c < f(b)$. En consecuencia, según el teorema 4, existe algún número x en $[y, b]$ tal que $f(x) = c$, con lo que x es una solución de (*). ▌

Estas consecuencias de los teoremas 1, 2 y 3 son las únicas que deduciremos ahora (sin embargo, estos teoremas desempeñarán un papel fundamental en todo lo que hagamos más adelante). Una sola cosa queda por hacer: demostrar los teoremas 1, 2 y 3. Por desgracia, no podemos hacerlo por ahora, ya que, a partir de nuestros conocimientos actuales acerca de los números reales (a saber, P1-P12), una demostración es *imposible*. De que esta infortunada conclusión es cierta podemos convencernos de varias maneras. Por ejemplo, la demostración del teorema 8 descansa solamente en la demostración del teorema 1; si pudiéramos demostrar el teorema 1, entonces la demostración del teorema 8 estaría completa, y así habríamos demostrado que todo número positivo tiene una raíz cuadrada. Según se ha indicado en la parte I, es imposible demostrar esto a partir de P1-P12. Consideremos de nuevo la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}.$$

Si no existiera ningún número x con $x^2 = 2$, entonces f sería continua, puesto que el denominador nunca sería $= 0$. Pero f no está acotada en $[0, 2]$. Así, pues, el teorema 2 depende esencialmente de la existencia de números que no son números racionales, y por lo tanto de alguna propiedad de los reales distinta de las P1-P12.

A pesar de nuestra incapacidad de demostrar los teoremas 1, 2 y 3, hay algunos resultados que reclamamos como ciertos. Si las figuras que hemos trazado tienen alguna conexión con las matemáticas que estamos haciendo, y si nuestra noción de función continua tiene algún grado de conexión con nuestra idea intuitiva, entonces los teoremas 1, 2 y 3 tienen necesariamente que ser verdad. Puesto que una demostración de cualquiera de estos teoremas debe exigir alguna propiedad nueva de $\mathbf{R}$ hasta ahora pasada por alto, nuestras dificultades presentes nos sugieren la manera de descubrir esta propiedad: Intentemos, por ejemplo, construir una demostración del teorema 1, y ver qué es lo que falla.

Una idea que parece prometedora es la de encontrar el primer punto en que $f(x) = 0$, es decir, el x más pequeño de $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$. Para encontrar este punto, consideremos primero el conjunto A que contiene todos los números x de $[a, b]$ tales que f es negativa en $[a, x]$. En la figura 11, x es uno de estos puntos, mientras que x' no lo es. El mismo conjunto A se indica mediante una línea grue-

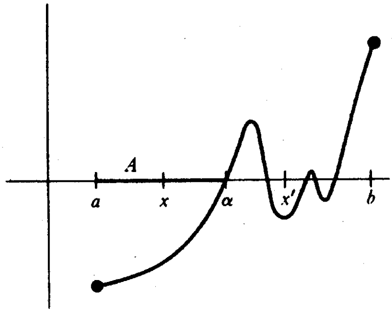

FIGURA 11

sa. Al ser f negativa en a y positiva en b, el conjunto A contiene algunos puntos mayores que a, mientras que todos los puntos suficientemente próximos a b no pertenecen a A. (Estamos aplicando aquí la continuidad de f en $[a, b]$ así como el problema 6-15.)

Supongamos ahora que α es el número más pequeño que es mayor que todos los miembros de A; evidentemente $a < \alpha < b$. Decimos que $f(\alpha) = 0$, y para demostrarlo nos basta con eliminar las posibilidades $f(\alpha) < 0$ y $f(\alpha) > 0$.

Supongamos primero que $f(\alpha) < 0$. Entonces, según el teorema 6-3, $f(x)$ sería menor que 0 para todo x de un intervalo pequeño conteniendo α, en particular para algunos números mayores que α (figura 12); pero esto contradice el hecho de que α es mayor que cualquier miembro de A, puesto que los números mayores estarían también en A. En consecuencia, $f(\alpha) < 0$ es falso.

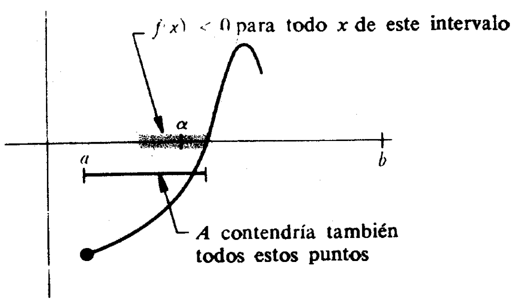

FIGURA 12

Por otra parte, supongamos $f(\alpha) > 0$. Aplicando de nuevo el teorema 6-3 vemos que $f(x)$ sería positivo para todo x de un intervalo pequeño conteniendo α, en particular para algunos números menores que α (figura 13). Esto significa que estos números más pequeños están todos *fuera* de A. En consecuencia, se podría haber elegido un α todavía más pequeño que sería mayor que todos los miembros de A. Otra vez tenemos una contradicción; $f(\alpha) > 0$ es también falso. Por lo tanto, $f(\alpha) = 0$ y nos tienta decir c. q. d.

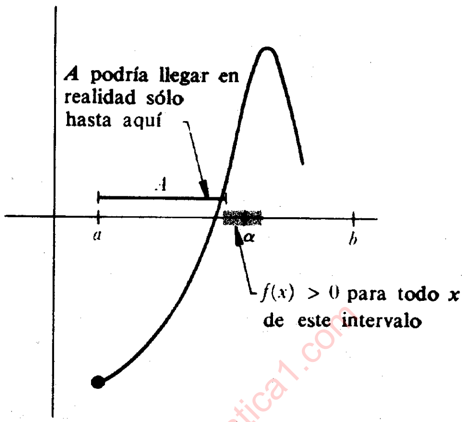

FIGURA 13

Sabemos, sin embargo, que algo debe estar equivocado, puesto que no se ha aplicado ninguna propiedad nueva de **R**, y no hace falta cavilar mucho para encontrar el punto dudoso. Está claro que podemos elegir un número α mayor que todos los miembros de A (por ejemplo, podemos elegir $\alpha = b$), pero no está tan claro que podamos elegir uno *más pequeño que todos*. En efecto, supongamos que A consiste en todos los números $x \geq 0$ tales que $x^2 < 2$. Si el número $\sqrt{2}$ no existiera, entonces no existiría un número mínimo mayor que todos los miembros de A; cualquiera que fuera el $y > \sqrt{2}$ que eligiéramos, siempre podríamos elegir uno más pequeño.

Una vez descubierto el sofisma, aparece casi evidente cuál es la propiedad adicional de los números reales que necesitamos. Ahora todo se reduce a explicarla debidamente y aplicarla. Éste es el objetivo del próximo capítulo.

PROBLEMAS

1. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles están acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo o mínimo. (Obsérvese que f *puede* tener estas propiedades aun no siendo continua, y aunque el intervalo no sea cerrado.)

(i) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$.
(ii) $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$.
(iii) $f(x) = x^2$ en $\mathbf{R}$.
(iv) $f(x) = x^2$ en $[0, \infty)$.
(v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ a+2, & x > a \end{cases}$ en $(-a-1, a+1)$. (Será necesario considerar distintos valores posibles para a.)

(vi) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$ en $[-a-1, a+1]$.

(vii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

(viii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

(ix) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ -1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

(x) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$ en $[0, a]$.

(xi) $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos x + \sqrt{1 + a^2})$ en $[0, a^3]$.
(xii) $f(x) = [x]$ en $[0, a]$.

2. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas f, hallar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n + 1$.

(i) $f(x) = x^3 - x + 3$.
(ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.
(iii) $f(x) = x^5 + x + 1$.
(iv) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

3. Demostrar que existe algún número x tal que

(i) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119$.

(ii) $\operatorname{sen} x = x - 1$.

4. Este problema es una continuación del problema 3-7.

(a) Si $n - k$ es par, y ≥ 0, hallar una función polinómica de grado n que tenga exactamente k raíces.

(b) Una raíz a de la función polinómica f se dice que tiene **multiplicidad** m si $f(x) = (x - a)^m g(x)$, donde g es una función polinómica que *no* tiene la raíz a. Sea f una función polinómica de grado n. Supóngase que f tiene k raíces, contando las multiplicidades, es decir, supóngase que k es la suma de las multiplicidades de todas las raíces. Demostrar que $n - k$ es par.

5. Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f?

6. Supóngase que f es una función *continua* en $[-1, 1]$ y tal que $x^2 + (f(x))^2 = 1$ para todo x. [Esto significa que $(x, f(x))$ está siempre sobre el círculo unidad.] Demostrar que o bien es $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ para todo x, o bien $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ para todo x.

7. ¿Cuántas funciones continuas f existen satisfaciendo $(f(x))^2 = x^2$ para todo x?

8. Supóngase que f y g son continuas, que $f^2 = g^2$ y que $f(x) \neq 0$ para todo x. Demostrar que o bien $f(x) = g(x)$ para todo x o bien $f(x) = -g(x)$ para todo x.

9. (a) Supóngase que f es continua, que $f(x) = 0$ solamente para $x = a$, y que $f(x) > 0$ para algún $x > a$ así como para algún $x < a$. ¿Qué puede decirse acerca de $f(x)$ para todo $x \neq a$?

(b) Supongamos ahora que $f(x) > 0$ para algún $x > a$ y que $f(x) < 0$ para algún $x < a$. ¿Qué puede decirse acerca de $f(x)$ para $x \neq a$?

*(c) Del mismo modo, discutir el signo de $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ cuando x e y no son ambos 0.

10. Supóngase que f y g son continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún x en $[a, b]$. (Si la demostración no es muy corta es que no está bien.)

11. Supóngase que f es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para todo x (dibujarlo). Demostrar que $f(x) = x$ para algún número x.

12. (a) El problema 11 demuestra que f corta a la diagonal del cuadrado en la figura 14 (línea continua). Demostrar que f debe también cortar la otra diagonal (de trazos).

(b) Demostrar el siguiente hecho más general: Si g es continua en $[0, 1]$ y $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ ó $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, entonces $f(x) = g(x)$ para algún x.

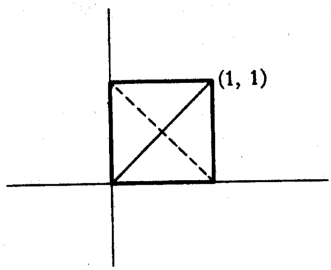

FIGURA 14

13. (a) Sea $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$. ¿Es f continua en $[-1, 1]$? Demostrar que f satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios en $[-1, 1]$; dicho de otro modo, si f toma dos valores comprendidos en $[-1, 1]$, toma también todos los valores intermedios.

*(b) Supóngase que f satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios, y que f toma *sólo una vez* cada uno de los valores. Demostrar que f es continua.

*(c) Generalizar al caso en que f toma cada uno de los valores solamente un número finito de veces.

14. Si f es una función continua en $[0, 1]$, sea $\|f\|$ el valor máximo de $|f|$ en $[0, 1]$.

(a) Demostrar que, cualquiera que sea el número c, se cumple $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$.

*(b) Demostrar que $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Dar un ejemplo en el que $\|f + g\| \neq \|f\| + \|g\|$.

(c) Demostrar que $\|h - f\| \leq \|h - g\| + \|g - f\|$.

***15.** Supongamos que ϕ es continua y $\lim_{x \to \infty} \phi(x)/x^n = 0 = \lim_{x \to -\infty} \phi(x)/x^n$.

(a) Demostrar que si n es impar, entonces existe un número x tal que $x^n + \phi(x) = 0$.

(b) Demostrar que si n es par, entonces existe un número y tal que $y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x)$ para todo x.

Indicación: ¿Qué demostraciones se trata de comprobar que el lector ha comprendido en este problema?

***16.** Sea f una función polinómica cualquiera. Demostrar que existe algún número y tal que $|f(y)| \leq |f(x)|$ para todo x.

***17.** Supóngase que f es una función continua con $f(x) > 0$ para todo x, y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$. (Dibujarlo.) Demostrar que existe algún número y tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo x.

***18.** (a) Supóngase que f es continua en $[a, b]$, y sea x un número cualquiera. Demostrar que existe un punto en la gráfica de f que es, entre todos, el más próximo a $(x, 0)$; en otras palabras, existe algún y en $[a, b]$ tal que la distancia desde $(x, 0)$ a $(y, f(y))$ es $\leq$ distancia de $(x, 0)$ a $(z, f(z))$ para todo z de $[a, b]$. (Véase la figura 15.)

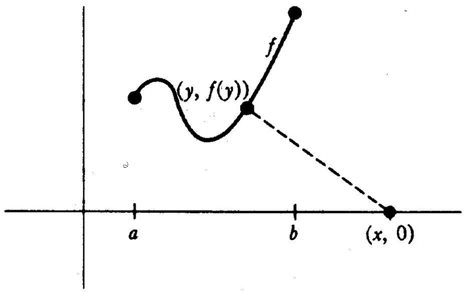

FIGURA 15

(b) Demostrar que esta misma afirmación no es necesariamente cierta si $[a, b]$ se sustituye por (a, b).

(c) Demostrar que la afirmación se cumple si $[a, b]$ se sustituye por **R**.

(d) En los casos (a) y (c), sea $g(x)$ la mínima distancia de $(x, 0)$ a un punto de la gráfica de f. Demostrar que $g(y) \leq g(x) + |x - y|$, y deducir que g es continua.

(e) Demostrar que existen números x_0 y x_1 en $[a, b]$ tales que la distancia de $(x_0, 0)$ a $(x_1, f(x_1))$ es $\leq$ la distancia de $(x_0', 0)$ a $(x_1', f(x_1'))$, cualesquiera que sean x_0', x_1' en $[a, b]$.

****19.** (a) Supóngase que f es continua en $[0, 1]$ y $f(0) = f(1)$. Sea n un número natural cualquiera. Demostrar que existe algún número x tal que $f(x) = f(x + 1/n)$, como se indica en la figura 16 para $n = 4$. Indicación: Considérese la función $g(x) = f(x) - f(x + 1/n)$; ¿qué ocurriría si $g(x) \neq 0$ para todo x?

(b) Supóngase que $0 < a < 1$ pero que a es distinto de $1/n$ cualquiera que sea el número natural n. Hallar una función f que sea continua en $[0, 1]$ y que satisfaga $f(0) = f(1)$, pero que no satisfaga $f(x) = f(x + a)$ para ningún x.

****20.** (a) Demostrar que no existe ninguna función continua f definida en **R** que tome exactamente dos veces cada uno de los valores. Indicación: Si

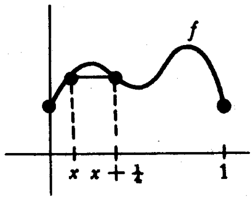

FIGURA 16

$f(a) = f(b)$ para $a < b$, entonces, o bien $f(x) > f(a)$ para todo x de (a, b), o bien $f(x) < f(a)$ para todo x de (a, b). ¿Por qué? En el primer caso todos los valores próximos a $f(a)$, pero ligeramente mayores que $f(a)$, son alcanzados en algún punto de (a, b); esto implica que $f(x) < f(a)$ para $x < a$ y $x > b$.

(b) Afinar la parte (a) demostrando que no existe ninguna función continua f que tome cada valor ya sea 0 ó dos veces, es decir, que tome exactamente dos veces todos los valores que tome. Indicación: La observación precedente implica que f tiene, ya sea un máximo o un mínimo (el cual debe ser alcanzado dos veces). ¿Qué puede decirse acerca de los valores próximos al máximo?

(c) Hallar una función continua f que tome todos los valores exactamente tres veces. De modo más general, hallar una función que tome todos los valores exactamente n veces, si n es impar.

(d) Demostrar que si n es par, entonces no existe ninguna función continua f que tome todos los valores exactamente n veces. Indicación: Para tratar por ejemplo el caso $n = 4$, póngase $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$. Entonces o bien $f(x) > 0$ para todo x en dos de los tres intervalos (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), o bien $f(x) < 0$ para todo x en dos de estos tres intervalos.