

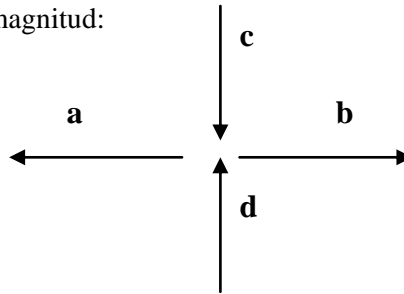
PROBLEMAS RESUELTOS

SUMA DE VECTORES METODO GEOMÉTRICO

1. Los vectores mostrados en la figura *tienen la misma magnitud* (10 unidades)

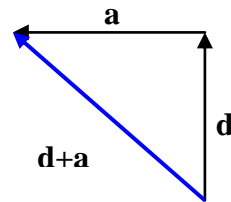
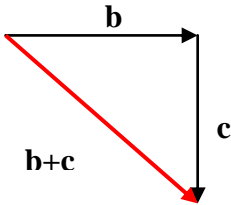
El vector $(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + (\mathbf{d}+\mathbf{a}) - 2\mathbf{c}$, es de magnitud:

- a) 0
- b) 20
- c) 10
- d) $20\sqrt{2}$
- e) $10\sqrt{2}$



Solución:

Este es un problema de aplicación del método del polígono. Proceda primeramente a encontrar el vector $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, haga lo mismo con el vector $(\mathbf{d} + \mathbf{a})$.



Notará usted observando el gráfico, que el vector $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ tiene la misma magnitud del vector $(\mathbf{d} + \mathbf{a})$, pero dirección contraria, por tanto:

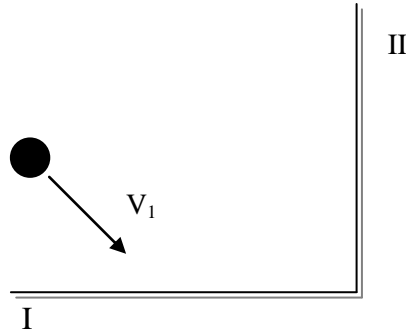
$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + (\mathbf{d} + \mathbf{a}) = \mathbf{0}$$



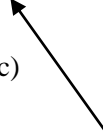

En consecuencia, el resultado de la operación $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + (\mathbf{d} + \mathbf{a}) - 2\mathbf{c} = -2\mathbf{c}$.

Si el vector \mathbf{c} tiene 10 unidades de magnitud, entonces el vector $-2\mathbf{c}$ tendrá

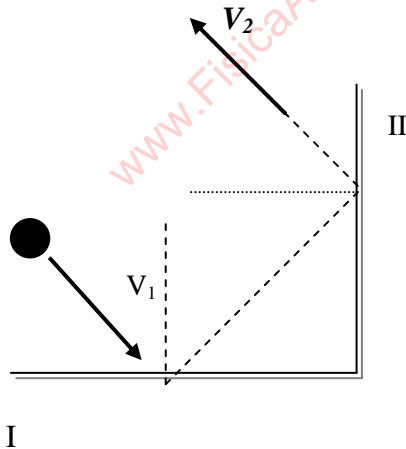
20 unidades

2. Si el ángulo con el que un objeto rebota es el mismo con el que incide, con respecto a un eje perpendicular a la superficie de impacto. ¿Cuál de los siguientes vectores representaría mejor al vector $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$?, donde \mathbf{V}_2 es la velocidad con que rebota de la superficie II.



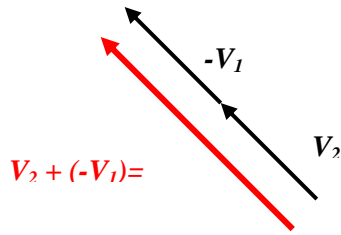
- a)  b)  c)  d) cero e) 

Solución:



Para poder realizar la diferencia entre los dos vectores, necesitamos conocer la magnitud y dirección del vector velocidad con que el objeto rebota de la segunda pared. Tracemos entonces la trayectoria del objeto luego de rebotar de las dos superficies, como se indica en el gráfico superior. Una vez obtenido el vector \mathbf{V}_2 , la velocidad con que rebota de la segunda pared, podemos obtener la diferencia entre ellos. Recordemos que la diferencia de dos vectores es equivalente a la suma de uno de ellos con el negativo del otro

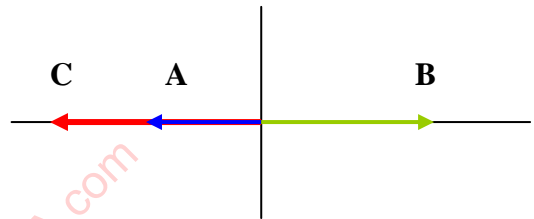
Al realizar la diferencia entre el vector V_2 y el vector V_1 por el método geométrico, tenemos:



La respuesta se aproxima a la alternativa **C**

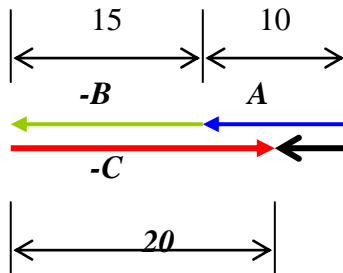
3. Los vectores **A**, **B** y **C** se muestran en la figura, cuyas magnitudes son 10 unidades, 15 unidades y 20 unidades respectivamente. El vector **A** – **B** – **C** es:

- a) 5 unidades dirigido hacia la derecha
- b) 25 unidades dirigido hacia la izquierda
- c) 15 unidades dirigido hacia la derecha
- d) 40 unidades dirigido hacia la derecha
- e) 5 unidades dirigido hacia la izquierda



Solución:

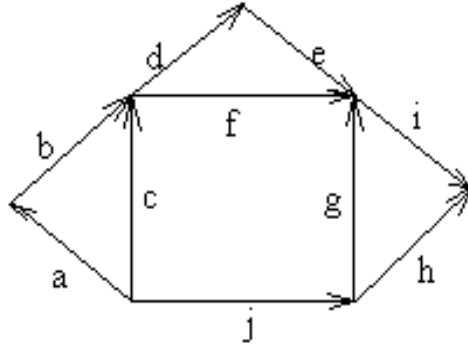
Realicemos la operación utilizando el método del polígono, unamos el extremo de un vector con el origen del otro (de acuerdo a la operación que nos estén pidiendo realizar), el vector $-C$ lo ubicamos ligeramente debajo para que no oculte a los otros vectores en el diagrama, el vector resultante es el que se dirige desde el origen del primero al extremo del último



Sería un vector de 5 unidades dirigido a la izquierda

4. Para los vectores mostrados en la figura. ¿Cuál de las siguientes alternativas es la correcta?

- a) $\mathbf{j} + \mathbf{g} - \mathbf{c} = \mathbf{a} + 2\mathbf{e}$
- b) $\mathbf{b} + \mathbf{f} - \mathbf{i} = \mathbf{j} + \mathbf{h} - \mathbf{a}$
- c) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 2\mathbf{g}$
- d) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d} + \mathbf{e} = \mathbf{f} + \mathbf{h} + \mathbf{i}$
- e) $\mathbf{b} + \mathbf{f} + \mathbf{i} = \mathbf{a} + \mathbf{j} + \mathbf{h}$

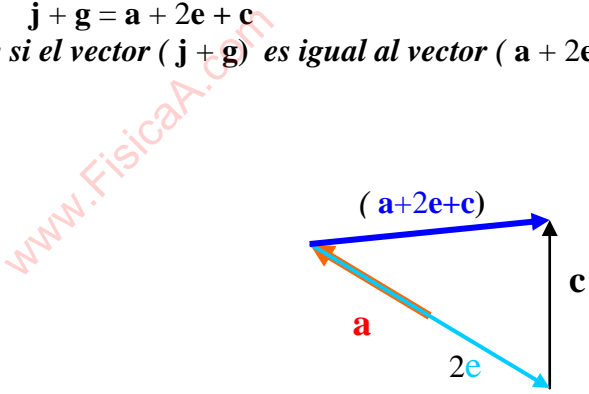
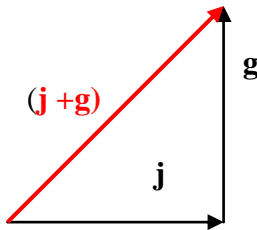


Solución:

Tomemos una de las alternativas múltiples para ilustrar la aplicación del método del polígono a este problema, escojamos la alternativa a) $\mathbf{j} + \mathbf{g} - \mathbf{c} = \mathbf{a} + 2\mathbf{e}$, podemos comenzar pasando el vector $-\mathbf{c}$ al lado derecho de la igualdad

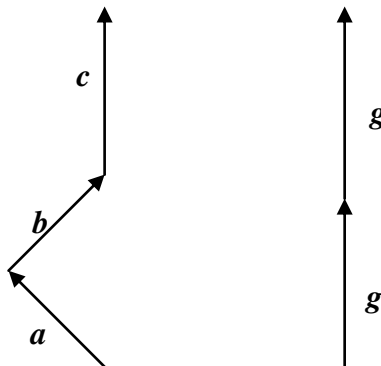
$$\mathbf{j} + \mathbf{g} = \mathbf{a} + 2\mathbf{e} + \mathbf{c}$$

Comprobemos gráficamente si el vector $(\mathbf{j} + \mathbf{g})$ es igual al vector $(\mathbf{a} + 2\mathbf{e} + \mathbf{c})$



Como podemos observar en los gráficos estos vectores no son iguales, en consecuencia la alternativa a) no es correcta, a continuación mostramos el desarrollo de la alternativa verdadera.

La alternativa correcta es la C



PROBLEMAS RESUELTOS

SUMA DE VECTORES METODO ANALÍTICO: LEY DEL SENO, LEY DEL COSENO Y DESCOMPOSICIÓN VECTORIAL

1. Dos vectores **a** y **b** tienen 10 y 15 unidades respectivamente, si la resultante de la suma de los vectores tiene 20 unidades, el **ángulo** entre los vectores es

- a) 75,5°
- b) 70,0°
- c) 65,5°
- d) 60,0
- e) 55,5°

Solución:

En este problema disponemos de las magnitudes de los dos vectores componentes y de la resultante de la suma de ellos. Un problema típico de aplicación de la ley del coseno. Recuerde que la ley del coseno relaciona las magnitudes de los vectores componentes y de la resultante, a sí como del ángulo formado entre los vectores componentes.

Llamemos c al vector resultante de la suma de los vectores a y b

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

De la ley del coseno

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos\theta$$

θ representa el ángulo formado entre los dos vectores a y b unidos por su origen.

$$\cos(\theta) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$$

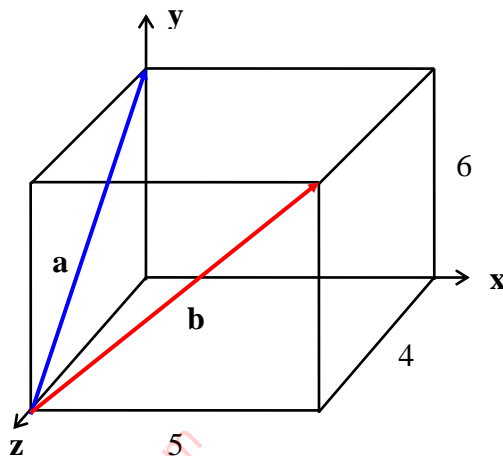
$$\cos(\theta) = \frac{20^2 - 10^2 - 15^2}{2 * 10 * 15}$$

$$\cos(\theta) = 0.25$$

$$\theta = 75,5$$

2. Para el paralelepípedo de la figura, determine el ángulo formado entre los vectores **a** y **b**.

- a) 45,0°
- b) 48,2°
- c) 50,2°
- d) 53,8°
- e) 55,2°



Solución:

*Apliquemos nuevamente la ley del coseno para encontrar el ángulo entre los vectores. Aquí necesitamos conocer las magnitudes de los vectores **a** y **b** y de la resultante de la suma de ellos. Con los valores de los lados del paralelepípedo obtenemos los vectores **a** y **b** en función de sus componentes rectangulares, una vez determinados **a** y **b** pasamos a calcular la resultante de la suma de los dos, digamos el vector **c**; ($c = a + b$).*

$$a = 6j - 4k \quad \Rightarrow \quad a^2 = 6^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7,21$$

$$b = 5i + 6j \quad \Rightarrow \quad b^2 = 5^2 + 6^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{5^2 + 6^2} = 7,81$$

$$\text{Llamamos } c \text{ al vector } (a + b) = 5i + 12j - 4k \Rightarrow c = \sqrt{5^2 + 12^2 + 4^2} = 13,60$$

Utilizando la ley del coseno

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta$$

*Despejando el coseno de θ y reemplazando los módulos de los vectores **a**, **b** y **c***

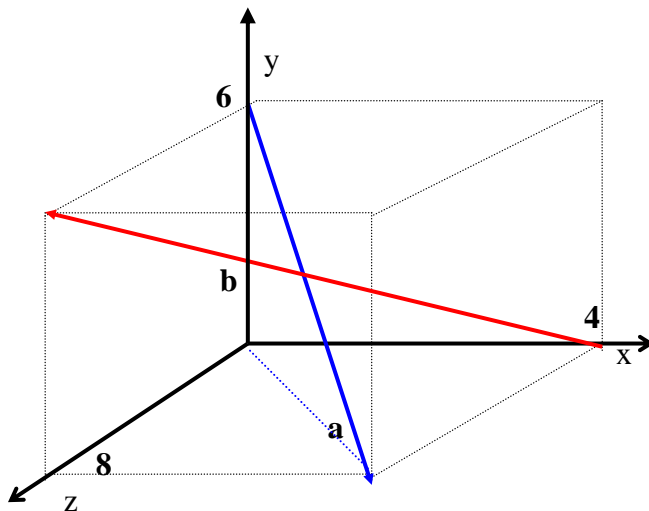
$$\text{Cos } \theta = (185 - 52 - 61) / 112,62$$

$$\text{Cos } \theta = 0,64$$

Por tanto θ es igual a 50,2°

3. Para los vectores mostrados en la figura, el vector que representa la operación: $\mathbf{a} - \mathbf{b}/2$ es

- a) $6\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$
- b) $3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
- c) $6\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
- d) $4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$
- e) $8\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$



Solución:

Los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} se encuentran dentro del paralelepípedo, observando el origen y el extremo de cada uno de ellos podemos determinar sus componentes rectangulares (las proyecciones del vector sobre cada uno de los ejes coordenados), por ejemplo: la componente sobre el eje “y” del vector \mathbf{a} vale 6 y apunta en dirección negativa (-j). Para determinar las componentes sobre los ejes “x” y “z”, proyectemos el vector sobre el plano x-z, seguidamente podemos observar que la componente sobre el eje “x” vale 4 y apunta en la dirección +i, y la componente sobre el eje “z” vale 8 y apunta en la dirección +k. De esta manera podemos escribir los vectores:

$$\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

El vector $\mathbf{b}/2$ lo obtenemos dividiendo cada uno de los módulos de sus componentes para 2 $\Rightarrow \mathbf{b}/2 = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Por tanto $(\mathbf{a} - \mathbf{b}/2) = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k} + 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

$\mathbf{a} - \mathbf{b}/2 = 6\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \rightarrow$ la respuesta es la c

4. Para el problema anterior, el ángulo formado entre los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} es

- a) 128°
- b) 84°
- c) 56°
- d) 48°
- e) 38°

Solución:

Tomando los vectores **a** y **b**, vamos a aplicar la ley del coseno para determinar el ángulo entre estos vectores. Determinemos primeramente la resultante de sumar los dos vectores.

$$\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \Rightarrow a^2 = 116$$

$$\mathbf{b} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \Rightarrow b^2 = 116$$

$$\mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k} - 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 16\mathbf{k} \Rightarrow c = 16$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos\theta$$

Despejando el $\cos\theta$ y reemplazando las magnitudes de **a**, **b** y **c**

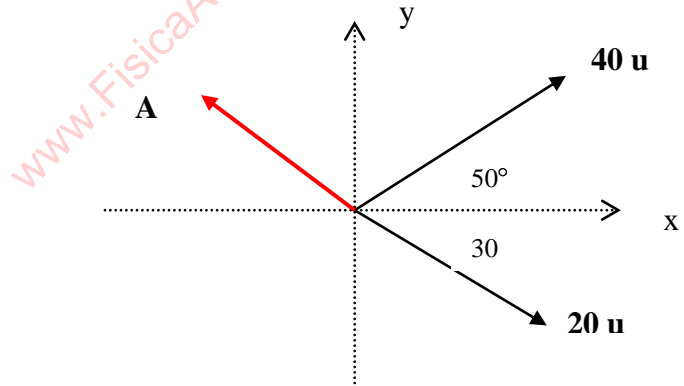
$$\text{Obtenemos } \cos\theta = (256 - 116 - 116) / 2 * 116$$

$$\cos\theta = 0,103$$

$$\text{Por tanto } \theta = 84^\circ$$

5. Los vectores mostrados en la figura al sumarse dan una resultante nula. La magnitud y dirección del vector **A** es.

- a) 60,3 u ; 25,6°
- b) 60,3 u ; 108,2°
- c) 47,7 u ; 205,6°
- d) 50,5 u ; 18,2°
- e) 50,5 u ; 198,2°



Solución:

Utilizando el método de descomposición vectorial podemos obtener dos ecuaciones, una para las componentes en “x”, y la otra para las componentes en “y”. Obtenidas las componentes en “x” y en “y” del vector, utilizaremos el teorema de Pitágoras para calcular la magnitud del vector **A**, y luego valiéndonos de una función trigonométrica podemos determinar la dirección del vector.

Si los tres vectores al sumarse dan una resultante nula ($\mathbf{R} = 0$), esto significa que sus componentes también deben serlo, esto es:

$\mathbf{R}_x = 0$, la suma de todas las componentes en “x” deben dar cero

$\mathbf{R}_y = 0$, la suma de todas las componentes en “y” deben dar cero.

$$\mathbf{R}_x = A_x + 40 \cos 50^\circ + 20 \cos(-30^\circ) = 0$$

$$\mathbf{R}_y = A_y + 40 \sin 50^\circ + 20 \sin(-30^\circ) = 0$$

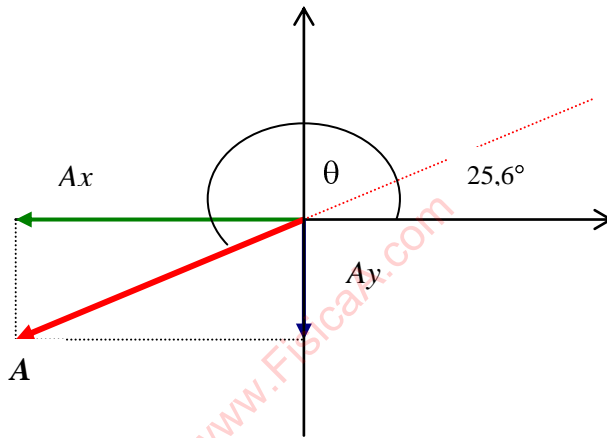
$$Ax + 25,71 + 17,32 = 0 \Rightarrow Ax = -43,03$$

$$Ay + 30,64 - 10 = 0 \Rightarrow Ay = -20,64$$

θ representa el ángulo que forma el vector A con el eje positivo de las "x".

Los ángulos son positivos cuando se miden en sentido antihorario y negativo cuando se miden en sentido horario.

Es conveniente ubicar estas componentes sobre ejes coordenados para identificar la dirección del vector.



Utilizando el teorema de Pitágoras determinamos la magnitud del vector A

$$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

$$A = \sqrt{(-43,03)^2 + (-20,64)^2}$$

$$A = 47,72$$

La línea de acción del vector la determinamos utilizando una función trigonométrica, por ejemplo

$$\tan \theta = Ay/Ax = -20,64/-43,03$$

$$\theta = \tan^{-1} (0,479)$$

$$\theta = 25,6^\circ$$

¡ Cuidado! La calculadora le da a usted la línea de acción del vector, la cual puede coincidir con la **dirección del vector**, vea el grafico de los vectores en la parte superior.

Por tanto, la dirección será

$$\theta = 180^\circ + 25,6^\circ$$

$$\theta = 205,6^\circ$$

6. Sean los vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. El ángulo que forma el vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ con el eje positivo de las x es

- a) $16,2^\circ$
- b) $20,4^\circ$
- c) $23,5^\circ$
- d) $26,2^\circ$
- e) $32,5^\circ$

Solución:

Observando los vectores nos podemos dar cuenta que estamos en presencia de vectores en tres dimensiones, en consecuencia podemos utilizar los cosenos directores para determinar la dirección del vector con cada uno de los ejes coordenados. Para utilizar los cosenos directores debemos conocer las componentes ortogonales del vector, y por su puesto su magnitud. Como solamente nos piden determinar el ángulo que forma el vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ con el eje de las "x", necesitamos conocer solamente la componente en "x" del vector \mathbf{C} , esto es C_x

Determinemos primero el vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, llamemos \mathbf{C} a este vector

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \Rightarrow C = \sqrt{36 + 1 + 4} = 6,4$$

$$C_x = 6, C_y = 1, C_z = 2$$

Recordando la definición de los cosenos directores, el ángulo α que forma el vector \mathbf{C} con el eje positivo de las "x" es

$$\cos(\alpha) = \frac{C_x}{C}$$

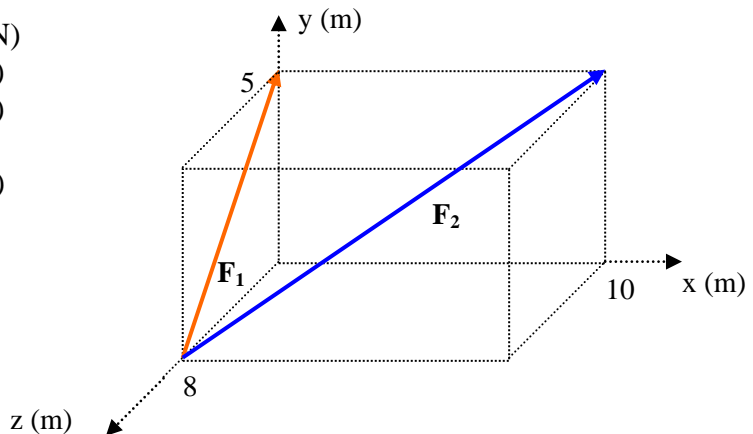
$$\cos(\alpha) = 6/6,4$$

Por tanto el ángulo α es $20,4^\circ$

7. Con referencia al paralelepípedo de la figura, el valor de la fuerza resultante, esto es $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ es:

- a) $73\mathbf{i} + 62,9\mathbf{j} - 100,5\mathbf{k}$ (N)
- b) $123\mathbf{i} + 63,5\mathbf{j} - 15,5\mathbf{k}$ (N)
- c) $123\mathbf{i} + 63,5\mathbf{j} - 100,5\mathbf{k}$ (N)
- d) $73\mathbf{i} + 63,5\mathbf{j} - 15,5\mathbf{k}$ (N)
- e) $73\mathbf{i} - 63,5\mathbf{j} - 100,5\mathbf{k}$ (N)

$\mathbf{F}_2 = 2\mathbf{F}_1 = 100 \text{ N}$



Solución:

Tenga cuidado con la magnitud de los vectores y las dimensiones del paralelepípedo, las dimensiones del paralelepípedo en este problema sirven para indicar la dirección de los vectores. El problema sólo nos da la magnitud de los vectores fuerza, para poder sumarlos tenemos que expresarlos en forma vectorial, esto es:

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \cos\alpha \mathbf{i} + F_1 \cos\beta \mathbf{j} + F_1 \cos\gamma \mathbf{k}$$

Donde: $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, los cosenos directores, los podemos determinar del gráfico de arriba

$$\cos(\alpha) = \frac{0}{\sqrt{5^2 + 8^2}} \Rightarrow 0$$

$$\cos(\beta) = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 8^2}} \Rightarrow 0,53$$

$$\cos(\gamma) = \frac{-8}{\sqrt{5^2 + 8^2}} \Rightarrow -0,85$$

$$\mathbf{F}_1 = 50(0) \mathbf{i} + 50(0,53) \mathbf{j} + 50(-0,85) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_1 = 26,5 \mathbf{j} - 42,5 \mathbf{k}$$

α , β y γ representan los ángulos que forman cada uno de los vectores con los ejes "x", "y" y "z"

$$\mathbf{F}_2 = F_2 \cos\alpha \mathbf{i} + F_2 \cos\beta \mathbf{j} + F_2 \cos\gamma \mathbf{k}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 5^2 + 8^2}} \Rightarrow 0,73$$

$$\cos(\beta) = \frac{5}{\sqrt{10^2 + 5^2 + 8^2}} \Rightarrow 0,36$$

$$\cos(\gamma) = \frac{-8}{\sqrt{10^2 + 5^2 + 8^2}} \Rightarrow -0,58$$

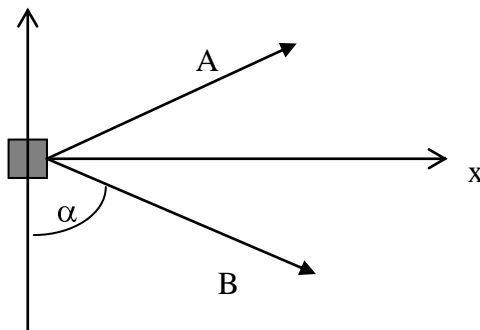
$$\mathbf{F}_2 = 100(0,73) \mathbf{i} + 100(0,364) \mathbf{j} + 100(-0,58) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_2 = 73 \mathbf{i} + 36,4 \mathbf{j} - 58 \mathbf{k}$$

Por tanto $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 73 \mathbf{i} + 62,9 \mathbf{j} - 100,5 \mathbf{k}$; alternativa a

8. Dos cuerdas A y B halan una caja como se indica en la figura. La cuerda A ejerce una fuerza de $(18,13 \mathbf{i} + 8,45 \mathbf{j})$ Newtons. Determine el valor del ángulo α , de tal forma que la resultante de la suma de las tensiones de las dos cuerdas se encuentre en la dirección del eje $x +$, y tenga un módulo de 40 Newtons

- a) 10°
- b) 15°
- c) 21°
- d) 42°
- e) 69°



Solución:

De acuerdo a la información del problema, el vector A es igual a:

$$A = 18,13 \mathbf{i} + 8,45 \mathbf{j}$$

$$A = \underbrace{18,13}_{A_x} \mathbf{i} + \underbrace{8,45}_{A_y} \mathbf{j}$$

Si la resultante de la suma de los dos vectores se encuentra en la dirección "x" esto significa que la componente A_y debe tener la misma magnitud que la componente B_y , y direcciones contrarias, es decir que:

$$B_y = 8,45 \text{ N}$$

Tomando la información de que la resultante apunta en dirección "x"

$$A_x + B_x = 40$$

$$\text{Siendo } A_x = 18,13 \text{ N}$$

Esto significa que:

$$B_x = 21,87 \text{ N}$$

Conociendo las componentes ortogonales del vector B, podemos expresarlo

$$B = 21,87 \mathbf{i} + 8,45 \mathbf{j}$$

Observando el gráfico del problema, el ángulo α es:

$$\tan \alpha = B_y/B_x$$

$$\alpha = \tan^{-1}(8,45/21,87)$$

$$\alpha = 21,1^\circ$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PRODUCTO ESCALAR Y PRODUCTO VECTORIAL

1. Dado los vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = 6\mathbf{i}$, el valor de a para que la magnitud de \mathbf{B} sea igual a tres veces la magnitud de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es:

- a) 3
- b) 1/3
- c) 6
- d) 1/6
- e) no puede determinarse

Solución:

La magnitud del vector \mathbf{B} es 6. determinemos la magnitud del vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & \alpha & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} (0) - \mathbf{j} (0) + \mathbf{k} (-6\alpha) = -6\alpha \mathbf{k}$$

La magnitud del vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es 6α .

Por tanto, el valor de α para que la magnitud de \mathbf{B} sea igual a tres veces la magnitud de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, es

$$6 = 3(6\alpha)$$

$$\alpha = 1/3$$

2. Para que los vectores: $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ sean ortogonales, α debe tomar el valor de

- a) -4
- b) 4
- c) -6
- d) 6
- e) -8

Solución:

De acuerdo a la definición de producto escalar, si dos vectores son ortogonales su producto escalar es cero.

Como los vectores vienen dados en función de sus componentes ortogonales, es más práctico utilizar la operación:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$a_x = 6; a_y = -3; a_z = 6$$

$$b_x = \alpha; b_y = -2; b_z = 3$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 6\alpha + 6 + 18 = 0$$

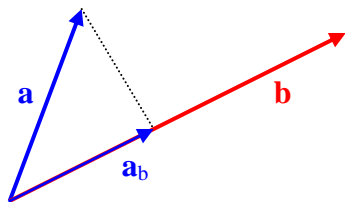
$$\alpha = -4$$

3. Sean los vectores: $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. La proyección del vector \mathbf{a} sobre el vector \mathbf{b} es.

- a) 4.6
- b) 3.2
- c) 2.8
- d) 2.2
- e) 1.2

Solución:

Por definición, geoméricamente, el producto escalar representa el área de un rectángulo que tiene por uno de sus lados la magnitud de uno de los vectores, y el otro lado la proyección del segundo vector sobre el primero.



a_b = proyección del vector \mathbf{a} sobre el vector \mathbf{b}

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos\theta = a_b b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$a_b = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{b}$$

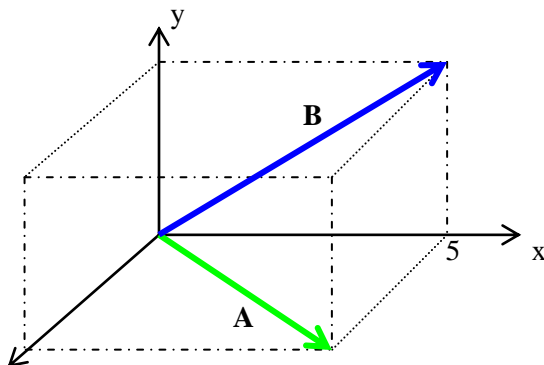
$$a_b = \frac{(5)(2) + (-2)(5) + (3)(6)}{\sqrt{4 + 25 + 36}}$$

$$a_b = \frac{18}{8,06}$$

$$a_b = 2,2$$

4. Conociendo que $|\mathbf{A}| = 10$ u y $|\mathbf{B}| = 15$ u, el ángulo formado entre los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} es

- a) $90,0^\circ$
- b) $86,4^\circ$
- c) $80,4$
- d) $76,4^\circ$
- e) $70,4^\circ$



Solución:

En este problema podemos hacer uso de la definición de producto escalar. Conocemos el módulo de los vectores y sus componentes las podemos obtener del gráfico.

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = AB \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

De acuerdo al gráfico, $A_y = 0$, $B_z = 0$

Por lo tanto $AB \cos\theta = A_x B_x$

Donde $A_x = 5$ y $B_x = 5$

$$\cos \theta = \frac{(5)(5)}{(10)(15)}$$

$$\theta = \cos^{-1}(0,16666)$$

$$\theta = 80,4^\circ$$

5. Los vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} se dirigen desde el origen de un sistema de coordenadas rectangulares a los puntos $(2, 3, 5)$, $(4, -5, -6)$ y $(-2, 6, -3)$ respectivamente. El resultado de la operación $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ es:

a) $4\mathbf{i} + 48\mathbf{j} - 33\mathbf{k}$

b) 19

c) 10

d) 9

e) 5

Solución:

Con las coordenadas del punto del extremo de cada vector, los vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} los expresamos como:

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{C} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

Realizamos la operación $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

Luego multiplicamos escalarmente este resultado con el vector \mathbf{C} .

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (-2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 11\mathbf{k}) \bullet (-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = 4 + 48 - 33$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = 19$$

6. Dado los vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = 6\mathbf{i}$, el valor de a para que la magnitud de \mathbf{B} sea igual a tres veces la magnitud de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es:

- f) 3
- g) 1/3
- h) 6
- i) 1/6
- j) no puede determinarse

Solución:

La magnitud del vector \mathbf{B} es 6. determinemos la magnitud del vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & a & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(-6a) = -6a\mathbf{k}$$

La magnitud del vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es $6a$.

Por tanto, el valor de a para que la magnitud de \mathbf{B} sea igual a tres veces la magnitud de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, es

$$6 = 3(6a)$$

$$a = 1/3$$

7. Para que los vectores: $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ sean ortogonales, α debe tomar el valor de

- f) -4
- g) 4
- h) -6
- i) 6
- j) -8

Solución:

De acuerdo a la definición de producto escalar, si dos vectores son ortogonales su producto escalar es cero.

Como los vectores vienen dados en función de sus componentes ortogonales, es más práctico utilizar la operación:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$a_x = 6; a_y = -3; a_z = 6$$

$$b_x = \alpha; b_y = -2; b_z = 3$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 6\alpha + 6 + 18 = 0$$

$$\alpha = -4$$

Florencio Pinela C.

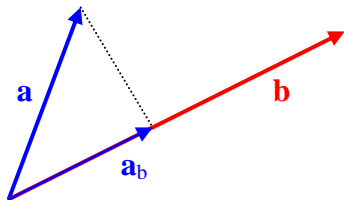
8. Sean los vectores: $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. La proyección del vector \mathbf{a} sobre el vector \mathbf{b} es.

- f) 4.6

- g) 3.2
- h) 2.8
- i) 2.2
- j) 1.2

Solución:

Por definición, geoméricamente, el producto escalar representa el área de un rectángulo que tiene por uno de sus lados la magnitud de uno de los vectores, y el otro lado la proyección del segundo vector sobre el primero.



a_b = proyección del vector **a** sobre el vector **b**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos\theta = a_b b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$a_b = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{b}$$

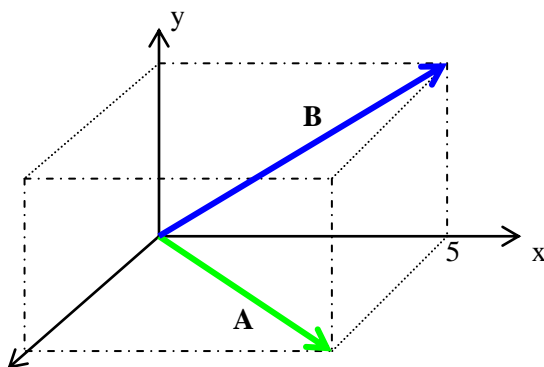
$$a_b = \frac{(5)(2) + (-2)(5) + (3)(6)}{\sqrt{4 + 25 + 36}}$$

$$a_b = \frac{18}{8,06}$$

$$a_b = 2,2$$

9. Conociendo que $|\mathbf{A}| = 10$ u y $|\mathbf{B}| = 15$ u, el ángulo formado entre los vectores **A** y **B** es

- f) $90,0^\circ$
- g) $86,4^\circ$
- h) $80,4$
- i) $76,4^\circ$
- j) $70,4^\circ$



Florencio Pinela C.

Solución:

En este problema podemos hacer uso de la definición de producto escalar. Conocemos el módulo de los vectores y sus componentes las podemos obtener del gráfico.

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = AB \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

De acuerdo al gráfico, $A_y = 0$, $B_z = 0$

$$\text{Por lo tanto } AB \cos\theta = A_x B_x$$

$$\text{Donde } A_x = 5 \text{ y } B_x = 5$$

$$\cos \theta = \frac{(5)(5)}{(10)(15)}$$

$$\theta = \cos^{-1}(0,16666)$$

$$\theta = 80,4^\circ$$

7. El trabajo se define como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento. Determine el trabajo que realiza una fuerza $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$ (N) al actuar sobre un cuerpo haciendo que éste se mueva desde un punto de coordenadas (2,10,-5) m hasta el punto (-2,5,8) m.

- a) 250 N.m
- b) 330 N.m
- c) 450 N.m
- d) 500 N.m
- e) 550 N.m

Solución:

El cuerpo se mueve desde el punto A(2, 10, -5), hasta el punto B(-2,5,8).

Representemos cada uno de estos puntos por los vectores:

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

Al ir del punto A al punto B habrá experimentado un desplazamiento $\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$, esto es:

$$\mathbf{AB} = (-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$$

$$\mathbf{AB} = -4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$$

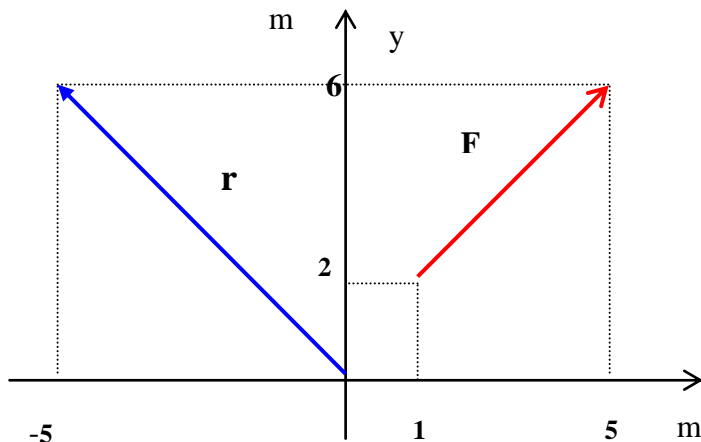
En consecuencia el trabajo debe ser:

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{AB} = (10\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 30\mathbf{k}) \bullet (-4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 13\mathbf{k})$$

$$\text{Trabajo} = -40 - 100 + 390 = 250 \text{ N}$$

8. Para el gráfico mostrado, evalúe el producto vectorial entre el vector \mathbf{F} de 50 unidades de magnitud y el vector posición \mathbf{r} .

- a) $-125\sqrt{2} \mathbf{i}$
- b) $150\sqrt{2} \mathbf{i} + 125\sqrt{2} \mathbf{j}$
- c) $275\sqrt{2} \mathbf{k}$
- d) $125\sqrt{2} \mathbf{k}$
- e) $150\sqrt{2} \mathbf{i}$



Solución:

Podríamos pensar en utilizar $|\mathbf{F} \times \mathbf{r}| = F r \sin \theta$, pero recordemos que esta expresión es para el módulo del vector $|\mathbf{F} \times \mathbf{r}|$.

Expresemos los vectores \mathbf{F} y \mathbf{r} en función de sus coordenadas rectangulares.

Observe que el plano en el que están graficados los vectores, los ejes representan unidades de longitud, el vector \mathbf{r} se representa en su real magnitud, mientras que para el vector \mathbf{F} las coordenadas sirven para su dirección.

$\mathbf{F} = F \cos \theta \mathbf{i} + F \sin \theta \mathbf{j}$; θ representa la dirección del vector \mathbf{F}

$\mathbf{r} = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j}$

$\mathbf{F} = 50 \cos 45^\circ \mathbf{i} + 50 \sin 45^\circ \mathbf{j} = 25\sqrt{2} \mathbf{i} + 25\sqrt{2} \mathbf{j}$

$\mathbf{r} = -5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 25\sqrt{2} & 25\sqrt{2} & 0 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = [6(25\sqrt{2}) + 5(25\sqrt{2})]\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{r} = 275\sqrt{2} \mathbf{k}$$

9. Sean los vectores $\mathbf{a} = (6\mathbf{i} + 8\mathbf{k})$ y $\mathbf{b} = (2\mathbf{j} - 5/8\mathbf{k})$, el resultado de la operación:

$2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}$, es

- a) 0
- b) -100
- c) 20
- d) $-60\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$
- e) No se puede realizar la operación.

Solución:

($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$) es un número, que al multiplicarlo por \mathbf{a} debe dar un vector, de las alternativas, sólo una da la posibilidad a que el resultado sea un vector. De todas maneras resolvamos el problema.

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 6(0) + 0(2) + 8(-5/8) = -5$$

$$2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} = 2(-5)(6\mathbf{i} + 8\mathbf{k})$$

$$2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} = -60\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$$